DIANCICHANGLILUN

电磁场理论与微波技术基础

YUWEIBOJISHUJICHU

周希朗　编著

上册(电磁场理论基础)

东南大学出版社



电磁场理论与微波技术基础丛书

- 电磁场理论与微波技术基础
  上册（电磁场理论基础）
- 电磁场理论与微波技术基础
  下册（微波技术基础）
- 电磁场理论与微波技术基础解题指导

责任编辑　李　玉
文字编辑　胡中正
责任印刷　张文礼
封面设计　瀚清堂



ISBN 7-81089-447-1
TN·18　总定价:48.00元

电磁场理论与微波技术基础

上 册

（电磁场理论基础）

周希朗

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书讲述"电磁场与微波技术"方面有关的基本规律、基本分析与计算方法以及基本工作原理。本书力求内容精练，物理概念清晰，文字易懂，便于自学。

全书分上、下两册出版。上册共分六章：矢量分析、电磁场的基本方程和电磁场运动的基本规律、静态场、平面电磁波、导行电磁波以及电磁波的辐射和接收的理论基础。

本书可供工科信息工程、电子科学与技术等专业的本科生、专科生以及高职学生用作教材，也可供高校有关专业的学生和有关科技人员用作参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论与微波技术基础/周希朗. —南京：东南大学出版社，2004.8

ISBN 7-81089-447-1

Ⅰ.电… Ⅱ.周… Ⅲ.①电磁场—理论②微波技术 Ⅳ.①O441.4②TN015

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第025431号

电磁场理论与微波技术基础

作　　者	周希朗		
责任编辑	李　玉	责任印制	张文礼
文字编辑	胡中正	版式设计	李　玉

出版发行　东南大学出版社
地　　址　南京四牌楼2号
邮　　编　210096
经　　销　江苏省新华书店
印　　刷　南京玉河印刷厂
开　　本　787 mm×1092 mm　1/16
总 印 张　29.75
总 字 数　760千字
版　　次　2004年8月第1版　　2004年8月第1次印刷
总 定 价　48.00元(上、下册)
印　　数　1—1000册

(凡因印装质量问题，可直接向发行部调换。电话：025—83795801)

前　　言

《电磁场理论与微波技术基础》是信息以及电子科学与技术等专业一门重要的专业基础课程，在一些新兴学科中也是一门重要的专业课程。本书参照本校《电磁场与微波技术》以及《电磁场与波》、《微波技术与天线》的教学大纲编写而成。

《电磁场理论与微波技术基础》分上、下两册出版，其中上册为"电磁场理论基础"的内容，下册为"微波技术基础"的内容。本册共分 6 章：第 1 章矢量分析，介绍矢量分析与场论的基础知识；第 2 章电磁场的基本方程和电磁场运动的基本规律，主要阐述麦克斯韦方程组以及由此导出的运动电磁场的方程；第 3 章静态场，介绍静电场、恒定电场和静磁场的基本概念以及基本的分析方法；第 4 章平面电磁波，叙述平面电磁波在无界空间中的传播以及投射到平面交界面上发生反射和透射的基本概念和基本的分析方法；第 5 章规则传输系统Ⅰ——导行电磁波，讲述规则传输系统中导行电磁波的分析方法和传输特性，主要介绍与矩形波导和同轴线有关的部分内容；第 6 章天线Ⅰ——电磁波的辐射和接收的理论基础，讲述电磁波辐射的基本概念和电流元、磁流元、对称振子和天线阵的辐射特性以及与接收有关的基础知识。

本书的读者须具有线性代数、复变函数、数理方程以及特殊函数等相关数学基础知识。

本书由周希朗老师编写，宫新保老师参加了部分工作。在本书编写过程中，还得到上海交通大学电子工程系及电磁场与微波技术教研室的有关领导和同事们的多方面鼓励与支持，东南大学出版社李玉老师为本书的出版给予了无私的帮助并付出了辛勤劳动，编者在此表示衷心的感谢。此外，在编写本书的过程中，编者参考了国内外有关的教材或参考书，同样编者向有关教材和参考书的编著者们致以崇高的敬意。

由于编者水平有限且时间仓促，书中难免存在疏漏之处，敬请读者不吝赐教。

作　者

2004.2

目　　录

第 1 章 矢量分析

矢量分析是研究电磁场与微波技术的主要数学工具之一，掌握本章的知识将为读者系统地学习其他章节的内容奠定必要的基础。本章首先对矢量分析方面的基础知识作必要的复习和补充；然后讨论标量场的梯度、矢量场的散度、旋度和相关定理；最后介绍正交曲线坐标系。

1.1 矢量的表示及其代数运算

1.1.1 矢量的表示及距离矢量

1）矢量的表示

众所周知，数学上只有大小的物理量称为标量或数量，如温度、压力、密度等。既有大小又有方向的量称为矢量，如力、速度、位移等。习惯上用黑体符号或在符号上加单向箭头表示矢量，如矢量 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\vec{A}$，本书采用前者表示方法。大小（又称为模值）为 1 的矢量称为单位矢量，它没有量纲。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量用 $\boldsymbol{a}_A$ 表示，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_A A$。

在三维空间中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为一有向的线段。此线段的长度代表 $\boldsymbol{A}$ 的模，其方向代表 $\boldsymbol{A}$ 的方向。在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为一由坐标原点出发的有向线段。设直角坐标系中沿三个坐标轴正方向上的单位矢量分别为 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$，并设矢量 $\boldsymbol{A}$ 在上述三个单位矢量方向上的投影（即坐标分量）分别为 A_x，A_y，A_z，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z \tag{1.1}$$

该矢量的模为

$$|\boldsymbol{A}|=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_A=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\boldsymbol{a}_x\frac{A_x}{A}+\boldsymbol{a}_y\frac{A_y}{A}+\boldsymbol{a}_z\frac{A_z}{A}=\boldsymbol{a}_x\cos\alpha+\boldsymbol{a}_y\cos\beta+\boldsymbol{a}_z\cos\gamma \tag{1.2}$$

式中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦，α，β，γ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x，y，z 轴正向之间

的夹角。显然，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。一般地，若矢量 $\boldsymbol{A}$ 的起点不在坐标原点，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 的上述表达式同样适用。

2) 位置矢量(矢径)与距离矢量

在直角坐标系中，从坐标原点出发向空间任一点 $p(x, y, z)$ 引出的有向线段称为该点的位置矢量或矢径，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，如图 1.1 所示。因为矢径 $\boldsymbol{r}$ 的三个坐标分量分别为 x, y, z，因此 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$。在本书的后续章节中，一般用 $\boldsymbol{r}$ 表示电磁场中场点 $p(x, y, z)$ 的位置矢量，用 $\boldsymbol{r}'$ 表示电磁场中源点 $p'(x', y', z')$ 的位置矢量，用 $\boldsymbol{R}$ 表示从点 p' 出发引向点 p 的距离矢量。于是，距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 的表示式为

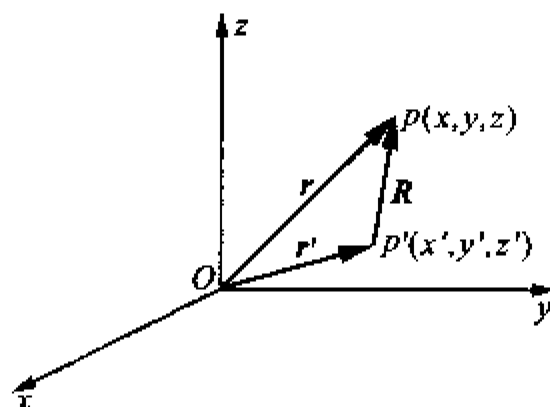


图 1.1 直角坐标系中的位置矢量

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z') \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{R}$ 的模为

$$R=|\boldsymbol{R}'|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

而它的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{a}_x\frac{x-x'}{R}+\boldsymbol{a}_y\frac{y-y'}{R}+\boldsymbol{a}_z\frac{z-z'}{R}$$

1.1.2 矢量的代数运算

1) 矢量加法

与矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中的表示相类似，设矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_xB_x+\boldsymbol{a}_yB_y+\boldsymbol{a}_zB_z$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x+B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y+B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z+B_z) \tag{1.4}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的和也可用几何作图法(平行四边形法则)得到，即将矢量 $\boldsymbol{B}$ 平移以使它的起点与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终点重合，再从矢量 $\boldsymbol{A}$ 的起点出发引向矢量 $\boldsymbol{B}$ 的终点得到。

矢量加法满足交换律和结合律，即

(a) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (1.5)

(b) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (1.6)

2) 矢量减法

设与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小相等方向相反的矢量为矢量 $\boldsymbol{B}$ 的负矢量，记为 $-\boldsymbol{B}$。矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $-\boldsymbol{B}$ 相加称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的差，记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{1.7}$$

与矢量加法类似，矢量减法也可用分量式表示，即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x-B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y-B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z-B_z) \tag{1.8}$$

3) 矢量的乘积

(1) 矢量的数乘

设 k 为任意常数，则

$$kA = a_A(kA)$$

显然，若 k 为大于零的实数，则 kA 相当于将原矢量 $\boldsymbol{A}$ 伸长（$k>1$）或缩短（$k<1$）k 倍，而方向保持不变；反之，若 k 为小于零的实数，则 kA 相当于将原矢量 $\boldsymbol{A}$ 伸长（$|k|>1$）或缩短（$|k|<1$）$|k|$ 倍，而方向变为相反方向。

(2) 矢量的标量积(标积)

一般说来，“一个矢量乘以另一个矢量”或“两个矢量相乘”的说法是不确切的，因为两个矢量之间存在两种不同类型的乘积，即标量积和矢量积(或点乘和叉乘)。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的标量积记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，其大小等于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的模与它们夹角的余弦的乘积，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta_{AB} \tag{1.9}$$

式中，θ_{AB} 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间较小的夹角，即 $\theta_{AB} < 180°$。

两矢量的标量积满足交换律和分配律，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.10}$$

以及

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.11}$$

但结合律不适用于标量积，因为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 这样的表达式无意义。

在直角坐标系下，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

(3) 矢量的矢量积(矢积)

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，它是一个矢量，它垂直于包含 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面，其大小为 $AB\sin\theta_{AB}$，θ_{AB} 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间较小的夹角，方向为当右手的四个手指从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 旋转 θ_{AB} 角时大拇指所指的方向，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_n AB\sin\theta_{AB} \tag{1.12}$$

显然，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模在数值上等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 组成的平行四边形的面积。

矢量积不满足交换律，即

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{1.13}$$

矢量积满足分配律，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1.14}$$

矢量积不满足结合律，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \tag{1.15}$$

这是因为上式左端三重矢量积的结果是垂直于 $\boldsymbol{A}$ 且垂直于与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所构成平面而垂直的矢

量的一个矢量，而上式右端三重矢量积的结果是垂直于 $\boldsymbol{C}$ 且垂直于与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成平面垂直的矢量的一个矢量，两者不相等，因此书写时不要将括弧省略。

在直角坐标系下，

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

(4) 三个矢量的乘积

三个矢量的乘积有两种，即三重标量积和三重矢量积。

① 三重标量积公式：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

式中，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的次序满足循环互换规律。

② 三重矢量积公式：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.18}$$

此式被称为“back-cab”规则。

注意：矢量为除数的除法无意义。

1.2 矢量场和标量场

矢量代数运算中涉及的矢量是常矢量，常矢量是大小和方向均不变的矢量。但在实际应用中，经常要研究的是大小或方向或两者都在变化的矢量，这种矢量称为变矢量。例如空间中一固定点的风速或电磁波的场强均是无时无刻不在变动的矢量，同时，在某一固定时刻于某一地区上空的风速和电磁波的场强是因地而异的，因此风速和电磁波的场强是随时随地而变的。当然，我们并不能满足于了解某矢量是否是变矢量，更重要的是掌握这种矢量与一个或几个变量间的依赖关系，从而可以更深刻地了解这些矢量的变化规律，这种变矢量就是依赖于一个或几个变量的矢量函数。如在直角坐标系中，空间中任一点 $p(x, y, z)$ 在某一时刻 t 的风速 $\boldsymbol{v}$ 是点 p 及时间 t 的矢量函数，可记为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(p, t)=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$。

矢量函数的极限、连续、微分以及积分等同数量函数（即标量函数）的分析方法完全类似，相应内容在《高等数学》有关章节中有详细讨论，在此不作介绍。下面给出标量场和矢量场的定义。

场的定义叙述为：若对于空间域 Ω 上每一点都对应着某个物理量的一个标量（数量）或一个矢量，则称此空间域确定了这个物理量的场。若所讨论的物理量是标量，则称这个场为标量场；若所讨论的物理量是矢量，则称这个场为矢量场。例如，若所研究的物理量是温度、压力、密度、电位等时，这些物理量在指定时刻和空间上每一点可用一个标量（即数量）来表示，即这些物理量的状态可用标量函数 $A(x, y, z, t)$ 来描绘，则这些标量函数在空间域上就定出标量场，即定出温度场、压力场、密度场、电位场等；反之，当所研究的物理量是力、速度、电场强度等时，这些物理量在指定时刻和空间上每一点可用一个矢量来表示，即这些物

理量的状态可用矢量函数 $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$来描绘，则这些矢量函数在空间域上就定出矢量场，即定出力场、速度场、电场强度场等。

若一个场中的每一点所对应的量不仅与该点的位置有关，还与时间有关，则称这种场为动态(时变)场。如果场中的每一点所对应的量与时间无关，则称这种场为静态场。

根据场的定义，所谓给出一个标量场或矢量场，从数学观点看，相当于给出一个标量函数或矢量函数。同时，一个矢量函数总可以分解为三个标量函数，如在直角坐标系下，有

$$\boldsymbol{A}(x, y, z, t) = \boldsymbol{a}_x A_x(x, y, z, t) + \boldsymbol{a}_y A_y(x, y, z, t) + \boldsymbol{a}_z A_z(x, y, z, t)$$

式中，A_x，A_y，A_z 都是标量函数。

除了标量和矢量外，既有大小又有张向的量称为张量或并矢，例如压力张量和电磁场张量等。张量通常用双向箭头符号或黑体符号上加单向箭头"→"来表示，如$\overleftrightarrow{A}$，$\vec{\boldsymbol{A}}$等。张量不便用几何方法表示。设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y + \boldsymbol{a}_z B_z$，则张量$\overleftrightarrow{T}$定义为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的并排放置的形式积，即

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{T} = \boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z)(\boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y + \boldsymbol{a}_z B_z) \\ &= \boldsymbol{a}_x\boldsymbol{a}_x A_x B_x + \boldsymbol{a}_x\boldsymbol{a}_y A_x B_y + \boldsymbol{a}_x\boldsymbol{a}_z A_x B_z + \\ &\quad \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{a}_x A_y B_x + \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{a}_y A_y B_y + \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{a}_z A_y B_z + \\ &\quad \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{a}_x A_z B_x + \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{a}_y A_z B_y + \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{a}_z A_z B_z\end{aligned}$$

可见，一个张量有九个分量。同样，一个张量场可分解为九个标量场。有关张量的详细讨论已超出本书范围，故不再介绍。

1.3 标量场的梯度

1.3.1 梯度的定义

标量场 $\phi(x, y, z)$在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$处沿有向直线 $\boldsymbol{l}$ 的变化率称为 ϕ 沿该方向的方向导数，记为$\left.\frac{\partial \phi}{\partial l}\right|_{p_0}$。在点 p_0 引出的有向直线 $\boldsymbol{l}$ 上取一动点 $p(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，因 ϕ 在点 p_0 可微，故有

$$\Delta\phi = \phi(p) - \phi(p_0) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\Delta z + O(\Delta l)$$

式中，$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$。于是

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{O(\Delta l)}{\Delta l}$$

令 $\Delta l \to 0$，可得 p_0 点的方向导数为

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial l}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta l} = \lim_{p \to p_0}\frac{\phi(p) - \phi(p_0)}{|\overline{p_0 p}|} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l} \tag{1.19}$$

设有向直线 l 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$,则 l 的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{a}_x\cos\alpha + \boldsymbol{a}_y\cos\beta + \boldsymbol{a}_z\cos\gamma$$

于是,有

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial l}\right|_{p_0} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.20}$$

因场中的 p_0 点可任意选取,故上式对 p_0 点的限制可略去。上述讨论是限于有向直线的情况,事实上,ϕ 沿有向曲线的方向导数具有同式(1.20)相同的表达形式。

为导出直角坐标系中标量场梯度的表达式,引出以下形式的矢量微分算子—哈密顿(W. R. Hamilton)算子∇(读作“del”或“nabla”),表示为

$$\nabla = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

则 $\nabla\phi = \left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$, 于是

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{a}_l = |\nabla\phi|\cos(\nabla\phi, \boldsymbol{a}_l) \tag{1.21}$$

这表明,矢量 $\nabla\phi$ 在 $\boldsymbol{a}_l$ 上的投影等于 ϕ 在该方向上的方向导数。若选择 $\nabla\phi$ 与 $\boldsymbol{a}_l$ 的方向一致,则 $\cos(\nabla\phi, \boldsymbol{a}_l) = 1$,此时方向导数将出现最大值,即

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial l}\right|_{\max} = |\nabla\phi| \quad 或 \quad \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial l_m}\boldsymbol{a}_m \tag{1.22}$$

式中,$\boldsymbol{a}_m$ 为方向导数出现最大值方向 $\boldsymbol{l}_m$ 上的单位矢量。这表明,$\nabla\phi$ 的模就是 ϕ 在给定点的最大方向导数,其方向就是 ϕ 具有最大方向导数的方向,即 ϕ 的变化率最大的方向。因此,定义标量场 ϕ 在 $p(x, y, z)$ 点处的梯度(gradient)为

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.23}$$

它是一个矢量,其模和方向就是标量场在该点处最大变化率的值和方向。

1.3.2 梯度的基本公式

若 k 是常数,ϕ 和 ψ 是标量,则

$$\nabla k = 0 \tag{1.24}$$

$$\nabla(\phi\pm\psi) = \nabla\phi\pm\nabla\psi \tag{1.25}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \tag{1.26}$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \tag{1.27}$$

1.4 矢量场的通量、散度与散度定理

1.4.1 通量

在描绘矢量场的性质时，矢量穿过一个曲面的通量是一个有用的概念。

为引出矢量场的通量，有必要先介绍一下面积微元矢量(简称面元矢量)的概念。一个面元除了其大小以外，在空间还有一定的取向。如图 1.2 所示，可用一个矢量来表示面元。取一个与面元垂直的单位矢量 $\boldsymbol{a}_n$，面元的大小为 $\mathrm{d}S$，则面元矢量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S \tag{1.28}$$

其中面元矢量的取向有两种情形：① 对一个开曲面，设此开曲面由一个闭曲线围成，如图所示，则当开曲面上的面元选定绕行方向后，沿绕行方向按右手螺旋的大拇指方向就是 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向；② 当 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是封闭曲面上的面元，则取为封闭面的外法线方向。

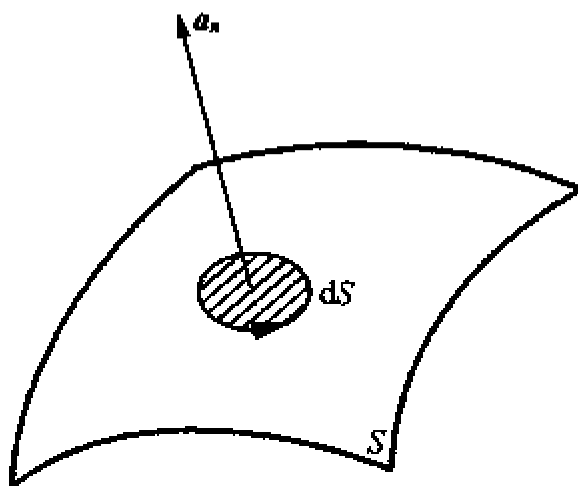


图 1.2 开曲面上的面元

在直角坐标系中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_x \mathrm{d}S_x + \boldsymbol{a}_y \mathrm{d}S_y + \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S_z$$

式中，$\mathrm{d}S_x = \boldsymbol{a}_x \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，为 $\mathrm{d}S$ 在 yOz 平面上的投影，其余类推。

若面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 位于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，因 $\mathrm{d}S$ 很小，其各点上 $\boldsymbol{A}$ 的值可视为相同，$\boldsymbol{A}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的标量积 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 便称为 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\mathrm{d}S$ 的通量。这样，将曲面 S 各面元上的通量 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 叠加即得穿过整个曲面 S 的通量，记为 Φ，有

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S \tag{1.29}$$

可见通量是一个标量。若 S 是一个封闭面，则

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.30}$$

它表示 $\boldsymbol{A}$ 穿过封闭面 S 的通量。若 $\Phi > 0$，则表明封闭曲面内有矢量场的源(称为通量源)；若 $\Phi < 0$，则表明封闭曲面内有矢量场的汇(称为负通量源)。

1.4.2 散度

封闭面的通量反映了封闭面内源的总特性，当包围某点 p 的封闭面的体积趋于零时，则可得到该点处通量源的分布特性。为此，定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在一点的散度(divergence)为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.31}$$

式中，ΔV 是包含 p 点的封闭面 S 所包围的体积。上式表明某点处 $\boldsymbol{A}$ 的散度等于单位体积上的净通量。

在直角坐标系下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度可用哈密顿算子与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的标量积表示，即 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$。这样，将$\nabla$及 $\boldsymbol{A}$ 的分量表达式代入此式，先按标量积规则展开，再作微分运算，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.32}$$

显然，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度是一个标量。此外，也可利用定义式(1.31)导出上式。

若 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为无散场，或称为管形场。

1.4.3 散度运算的基本公式

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矢量，ϕ 为标量，则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.33}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi \tag{1.34}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi\xlongequal{\text{直角坐标系}}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{1.35}$$

式中，∇^2称为拉普拉斯算子。

1.4.4 散度定理

散度定理是与散度运算有关的定理。图 1.3 表示矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中一个任取的体积 V，其表面积为 S。将此体积分为 n 个小体积元，其体积分别是 ΔV_1，ΔV_2，…，ΔV_n，每个小体积元的表面积是 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_n。根据散度定义，第 i 个体积元上矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度与 ΔV_i（$\Delta V_i\to 0$，$i=1,2,\cdots,n$）的乘积等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过它的闭合面 ΔS_i 上的通量，于是有

$$\lim_{\Delta V_i\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_i=\oint_{\Delta S_i}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{ni})\mathrm{d}S \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.36}$$

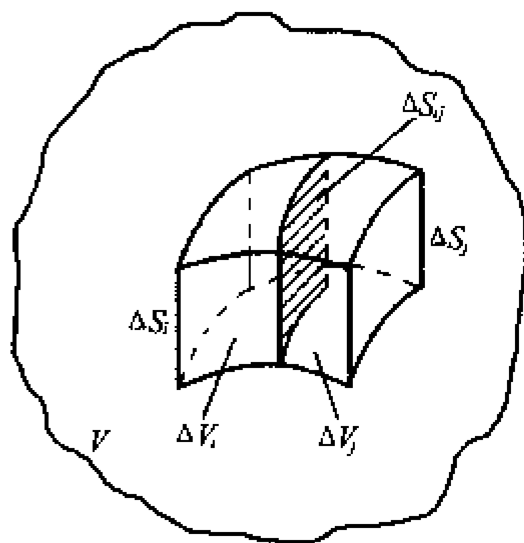


图 1.3 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的体积及体积元

式中，$\boldsymbol{a}_{ni}$ 为 ΔV_i 的表面积 ΔS_i 的外法向单位矢量。设第 j 个体积元与第 i 个体积元相邻，从而穿过第 j 个体积元上的通量满足同式(1.36)形式完全相同的表达式（将式(1.36)中的下标 i 用 j 代替）。于是，从第 i 和第 j 个体积元中穿出的通量应为

$$\lim_{\Delta V_i\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_i+\lim_{\Delta V_j\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_j=\oint_{\Delta S_i}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{ni})\mathrm{d}S+\oint_{\Delta S_j}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{nj})\mathrm{d}S$$

由于两个体积元的公共面 ΔS_{ij} 上，$\boldsymbol{a}_{ni}=-\boldsymbol{a}_{nj}$，而矢量 $\boldsymbol{A}$ 相同，因此两个体积元在公共面积 ΔS_{ij} 上穿过的通量相互抵消。这样，上式右端的两项面积分之和等于 ΔV_i 和 ΔV_j 构成的总体积的外表面上的通量。依此类推，穿过整个体积 V 的通量应等于包围整个体积的闭合面 S 上的通量，即

$$\sum_{i=1}^{n}\lim_{\Delta V_i\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}\oint_{\Delta S_i}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{ni})\mathrm{d}S=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

在上式中，当 $\Delta V_i\to 0$ 时，$n\to\infty$，则有

$$\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{1.37}$$

上式称为散度定理，也称为奥高定理。它表明，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在场中任意一个体积内的体积分等于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在包围此体积的封闭曲面上的法向分量沿封闭面的面积分。

1.5 矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理

1.5.1 环量

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿一封闭曲线的线积分，定义为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿该封闭曲线的环量(或称旋涡量)，记为 Γ，即

$$\Gamma=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\tag{1.38}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是封闭曲线 l 上的线元矢量。

与矢量的通量一样，矢量的环量也是描述矢量特性的重要参量。若矢量的环量不为零，就表示矢量场中存在一种不同于通量源的源——旋涡源。例如，在环绕电流的封闭曲线上磁场的环量不为零，电流就是产生该磁场的旋涡源。

在直角坐标系中，式(1.38)可表示为

$$\Gamma=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l A\cos\theta\mathrm{d}l=\oint_l(A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z)\tag{1.39}$$

1.5.2 旋度

为了反映矢量场中给定点附近环量的分布特性，令封闭曲线 l 所包围的面积 ΔS 趋于零，并考虑到环量的大小决定于封闭曲线 l 相对于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的取向，可定义矢量 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的旋度(rotation)为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_n\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\left(\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)_{\max}}{\Delta S}\tag{1.40}$$

可见矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度是一个矢量，其大小是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的最大环量面密度（或称单位面积上的环量），其方向是当面元矢量的取向使环量面密度最大时该面元矢量的方向（$\boldsymbol{a}_n$）。其中面元矢量的法向单位矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 与封闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 的绕行方向间满足右手螺旋关系。具体地，当右手的四指沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向时，大拇指所指的方向即为 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向。

矢量的旋度描述了该矢量在给定点处的旋涡强度。若一个矢量的旋度为零，则称该矢量是无旋的或保守的。

在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可表示为哈密顿算子∇与 $\boldsymbol{A}$ 的矢量积，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

将∇与 $\boldsymbol{A}$ 的分量表达式代入上式右端，展开得

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z) \\ &= \boldsymbol{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.41}$$

此式也可按旋度定义式(1.40)导出。

1.5.3 旋度运算的基本公式

若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矢量，ϕ 为标量，则

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \pm \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1.42}$$

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \phi(\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\nabla \phi) \times \boldsymbol{A} \tag{1.43}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{1.44}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.45}$$

1.5.4 斯托克斯定理与旋度定理

由旋度的定义式(1.40)，可导出斯托克斯定理。如图 1.4 所示，令 S 是以封闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 为边界的有限开曲面。将表面积 S 划分成 n 个面积元 $\Delta S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，其单位法向矢量为 $\boldsymbol{a}_{ni}$，且封闭曲线 $\Delta \boldsymbol{l}_i$ 包围面积元 ΔS_i，则当 $\Delta S_i \to 0$ 时，由式(1.40)，对第 i 个闭曲线 $\Delta \boldsymbol{l}_i$，有

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{a}_{ni} \Delta S_i = \oint_{\Delta l_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

对开曲面 S 上所有的闭曲线 $\Delta \boldsymbol{l}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，将上式求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\lim_{\Delta S_i\to 0}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{a}_{ni}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}\oint_{\Delta l_i}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

因开曲面 S 上任意两个相邻面元矢量 $\Delta\boldsymbol{S}_i$ 和 $\Delta\boldsymbol{S}_j$ 的公共边界上的线积分正好抵消，如图 1.4 所示。这样，上式右端相加后只有原来最外面的边界线 $\boldsymbol{l}$ 上的积分得以保留。因此，当 $\Delta S\to 0$，即 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad(1.46)$$

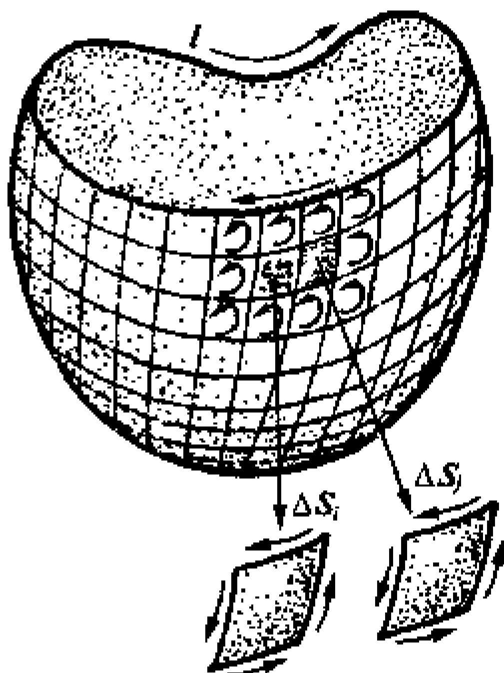


图 1.4 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的开曲面及两个相邻面元

这就是斯托克斯定理的数学表达式。它可以将矢量旋度的面积分变换为该矢量的线积分或反之。

除斯托克斯定理以外，还有一个关于矢量旋度的体积分和矢量闭曲面积分之间的关系，其数学表达式为

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=-\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}\qquad(1.47)$$

此式称为旋度定理，可利用散度定理证明。

例 1.1 已知 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量，c 为常数。

证明：① $\nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；

② $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；

③ $\nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(c\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

证：设 $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{a}_x+k_y\boldsymbol{a}_y+k_z\boldsymbol{a}_z$，其中 k_x，k_y，k_z 为常数；$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$，则

$$\text{①}\ \nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)[\mathrm{e}^{c(k_xx+k_yy+k_zz)}]$$
$$=c(k_x\boldsymbol{a}_x+k_y\boldsymbol{a}_y+k_z\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{c(k_xx+k_yy+k_zz)}=c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\text{②}\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$$
$$=\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中，因 $\boldsymbol{A}$ 为常矢量，故$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。

$$\text{③}\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{A}$$
$$=c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{A}=(c\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中，$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$。

1.6 标量场、矢量场的重要性质和定理

1.6.1 两个重要性质

性质 1：梯度场的旋度恒为零，即

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \tag{1.48}$$

可见，无旋场可表示为一旋度场。即，若 $\nabla \times \boldsymbol{f} = 0$，则可令 $\boldsymbol{f} = \nabla \phi$（其中 ϕ 可含一任意常数 ϕ_0）。

性质 2：旋度场的散场恒为零，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.49}$$

可见，无散场可表示为一旋度场。即，若 $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$，则可令 $\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{A}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 中可含一任意梯度项 $\nabla \phi$）。

1.6.2 三个重要定理

1）标量格林定理

将散度定理中矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示为一标量函数 ϕ 的梯度 $\nabla \phi$ 与另一标量函数 ψ 的乘积，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$$

对上式的两端取体积分，并应用散度定理，得

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) \mathrm{d}V = \oint_S (\psi \nabla \phi) \cdot \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.50}$$

式中，S 是包围体积 V 的闭曲面，$\boldsymbol{a}_n$ 是闭曲面 S 的外法线方向的单位矢量，n 为曲面上的任意一点处法线方向上的坐标量。此式称为标量格林(G. Green)第一定理。

互换式(1.50)中 ϕ 和 ψ 的位置，有

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V = \oint_S (\phi \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.51}$$

将式(1.51)减去式(1.50)，即得

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \mathrm{d}V = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S \tag{1.52}$$

这就是标量格林第二定理。特别地，若 $\phi = \psi$，则标量格林第一定理变为

$$\int_V (\phi \nabla^2 \phi + |\nabla \phi|^2) \mathrm{d}V = \oint_S (\phi \nabla \phi) \cdot \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S = \oint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.53}$$

利用此式可证明矢量场的惟一性定理。

应指出，除了标量格林第一、二定理以外，还有矢量格林第一、二定理等，可参阅其他文献。

2）矢量场的惟一性定理

惟一性定理说明一个矢量场在区域中是惟一确定的。它可叙述为：一个矢量场被其散度、旋度和区域边界上的齐次边界条件（边界上的切向或法向边界条件）惟一确定。

证明：设两个矢量场 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 在体积 V 内散度和旋度处处相同，并且在边界面 S 上它们的法线方向或切线方向上的分量相同，需证明 $\boldsymbol{f}_1$ 恒等于 $\boldsymbol{f}_2$。

令 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{f}_2$，则由于$\nabla\times\boldsymbol{f}=\nabla\times\boldsymbol{f}_1-\nabla\times\boldsymbol{f}_2=0$，因此，由性质1可知，$\boldsymbol{f}=\nabla\phi$。又因式(1.53)中的 $\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\nabla\cdot\boldsymbol{f}_1-\nabla\cdot\boldsymbol{f}_2=0$，故式(1.53)中左端的第一项等于零。

若已知边界条件为边界上矢量场的法向分量连续，即 $f_{1n}=f_{2n}$，则在边界上$\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\nabla\phi)_n\mathrm{d}S=(f_{1n}-f_{2n})\mathrm{d}S=0$，此时式(1.53)右端积分为零；若边界条件为边界上矢量场的切向分量连续，即 $f_{1t}=f_{2t}$，则$(\nabla\phi)_t=f_{1t}-f_{2t}=0$，此时边界面 S 为 ϕ 的等值面，式(1.53)右端的积分也为零。又考虑到散度定理，有

$$\oint_S\phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\phi\oint_S\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\phi\int_V\nabla^2\phi\mathrm{d}V=0$$

所以，式(1.53)左端的第二项为零，即

$$\int_V|\nabla\phi|^2\mathrm{d}V=0$$

又因为 $|\nabla\phi|^2$ 为正数，即 $|\nabla\phi|^2\geqslant0$，故由上式有

$$\nabla\phi=0\quad\text{或}\quad\nabla\phi=\boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{f}_2=0$$

即 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 全等。

3) 亥姆霍兹定理与场的分类

(1) 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹(H. V. Helmholtz)定理可叙述为：若矢量场 $\boldsymbol{f}$ 在无限空间中处处单值，且其导数连续、有界，而源分布在有限区域中，则矢量场 $\boldsymbol{f}$ 由其散度和旋度惟一确定。$\boldsymbol{f}$ 可分解为无旋场 $\boldsymbol{f}_d$(有散度)和无散场 $\boldsymbol{f}_c$(有旋度)之和，即

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_d+\boldsymbol{f}_c \tag{1.54}$$

并且，$\boldsymbol{f}$ 可表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，即

$$\boldsymbol{f}=-\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.55}$$

此定理的严格证明较繁，这里不作证明。

(2) 场的分类

由亥姆霍兹定理可知，一个矢量场的散度和旋度不能单独、完整地描述场。事实上，在电磁场理论中，通常根据矢量场的散度和旋度是否为零可将电磁场分为四类，即第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ类场。

① 第Ⅰ类场：该类场 $\boldsymbol{f}$ 在区域中处处满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$ 和$\nabla\times\boldsymbol{f}=0$。由矢量场的性质1知，可将 $\boldsymbol{f}$ 表示为 $\boldsymbol{f}=-\nabla\phi$。这样，由 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$，得

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1.56}$$

这是拉普拉斯方程。可见，为了求得第Ⅰ类场，必须求解拉普拉斯方程及由区域边界构成的定解问题求得 ϕ，然后由 $\boldsymbol{f}=-\nabla\phi$ 确定 $\boldsymbol{f}$。如静止电荷存在区域中的静电场和无电流存在区域中的静磁场都属于这一类场。

② 第Ⅱ类场：该类场 $\boldsymbol{f}$ 在某区域中处处满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}\neq 0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{f}=0$。由矢量场的性质 1 同样可知，$\boldsymbol{f}=-\nabla\phi$。但 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}\neq 0$，设 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\rho$，其中 ρ 为一个任意常数或区域中的一个已知函数。于是有

$$\nabla^2\phi=-\rho \tag{1.57}$$

这是泊松方程。可见，为了求得第Ⅱ类场，需求解由泊松方程及区域边界构成的定解问题，即先求得 ϕ，然后由 $\boldsymbol{f}=-\nabla\phi$ 确定 $\boldsymbol{f}$。如有体电荷存在区域中的静电场就属于这一类场。

③ 第Ⅲ类场：该类场 $\boldsymbol{f}$ 在区域中满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{f}\neq 0$。因 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$，由矢量场的性质 2 知，$\boldsymbol{f}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为另一矢量场。又因 $\nabla\times\boldsymbol{f}\neq 0$，将它写为 $\nabla\times\boldsymbol{f}=\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}$ 为一已知矢量场。这样，将 $\boldsymbol{f}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 代入 $\nabla\times\boldsymbol{f}=\boldsymbol{J}$，即得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}\ \text{或}\ \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J} \tag{1.58}$$

又由亥姆霍兹定理知，为使矢量场 $\boldsymbol{f}$ 惟一，必须定义其散度。若采用规范条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$（称为库仑规范条件，见第 2 章），则有

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{J} \tag{1.59}$$

这是矢量泊松方程。因此，为求得第Ⅲ类场，则必须求解由矢量泊松方程构成的定解问题。如载流导体内部的磁场就属于第Ⅲ类场。

④ 第Ⅳ类场：该类场 $\boldsymbol{f}$ 在区域中处处满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}\neq 0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{f}\neq 0$。但可将 $\boldsymbol{f}$ 分解为另外两个矢量场 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$，使 $\boldsymbol{f}_1$ 满足第Ⅲ类场以及 $\boldsymbol{f}_2$ 满足第Ⅱ类场的要求，即

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2$$

其中 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}_1=0$，$\nabla\times\boldsymbol{f}_1\neq 0$，而 $\nabla\times\boldsymbol{f}_2=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{f}_2\neq 0$。这样，$\boldsymbol{f}_1=\nabla\times\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{f}_2=-\nabla\phi$，从而有

$$\boldsymbol{f}=\nabla\times\boldsymbol{A}-\nabla\phi$$

这正是亥姆霍兹定理中给出的表达式。这一类场在电磁场中并不常见。

例 1.2 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别表示自由空间中点 $p(x,y,z)$ 和点 $p'(x',y',z')$ 的矢径，$R=|\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，表示两点间的距离。

证明：① $\nabla R=-\nabla' R=\boldsymbol{R}/R$；

② $\nabla(1/R)=-\nabla'(1/R)=-\boldsymbol{R}/R^3$。其中 ∇ 和 ∇' 分别表示对点 (x,y,z) 和点 (x',y',z') 的哈密顿算子。

证明：①因 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')$，故

$$R=|\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\nabla R=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\boldsymbol{a}_x\left(\frac{x-x'}{R}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{y-y'}{R}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{z-z'}{R}\right)=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

$$\nabla' R=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial R}{\partial x'}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial R}{\partial y'}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial R}{\partial z'}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

即
$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

② 因 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{[R\nabla(1) - \nabla R]}{R^2} = \frac{-\nabla R}{R^2}$，$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{-\nabla' R}{R^2}$，故

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

1.7　正交曲线坐标系

根据求解实际电磁场边值问题的需要，科学家们已经发现了十多种有用的坐标系。电磁理论中最基本的场论运算（如梯度、散度以及旋度等）适用于各种坐标系。然而，前面仅导出梯度、散度以及旋度等在直角坐标系中的表达式。除了直角坐标系以外，在电磁场理论中还常用圆柱、圆球以及椭圆柱等坐标系。为了运用其他坐标系，有必要引入正交曲线坐标系并导出正交曲线坐标系的单位矢量和度量因子以及梯度、散度和旋度等的一般表达式。

1.7.1　正交曲线坐标系的单位矢量和度量因子

在直角坐标系中，空间每一点对应一组坐标(x, y, z)，当用正交曲线坐标表示时，则对应一组坐标(u_1, u_2, u_3)。这两种坐标系的坐标变量之间的变换关系可表示为

$$u_1 = g_1(x, y, z),\ u_2 = g_2(x, y, z),\ u_3 = g_3(x, y, z) \tag{1.60a}$$

$$x = G_1(u_1, u_2, u_3),\ y = G_2(u_1, u_2, u_3),\ z = G_3(u_1, u_2, u_3) \tag{1.60b}$$

这里 $u_1 = g_1(x, y, z)$ 是一个曲面族，每一个 u_1 值对应着一个曲面。同样，$u_2 = g_2(x, y, z)$ 和 $u_3 = g_3(x, y, z)$ 也分别代表一个曲面族。这些曲面族互相相交，空间中任一点 $p(u_1, u_2, u_3)$就是三个曲面的交点，如图 1.5 所示。图中①、②、③分别是 u_1 = const.（常数），u_2 = const.，u_3 = const. 的三个曲面，其中①、②的交线是 u_3 线，②、③的交线是 u_1 线，依此类推。所谓正交曲线坐标系就是任一点处 u_1 线、u_2 线和 u_3 线的切线互相正交。若用 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 依次表示坐标曲线 u_1，u_2，u_3 在点 p 处的切线矢量 $\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{l}_3$ 上的单位矢量，其正向分别指向 u_1，u_2，u_3 增加的一侧，它们并构成右手坐标制。在正交曲线坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 的方向是随任意点 p 的变化而变化的，这同直角坐标系不同，即 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 一般不是常矢量，而 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 则是常矢量。

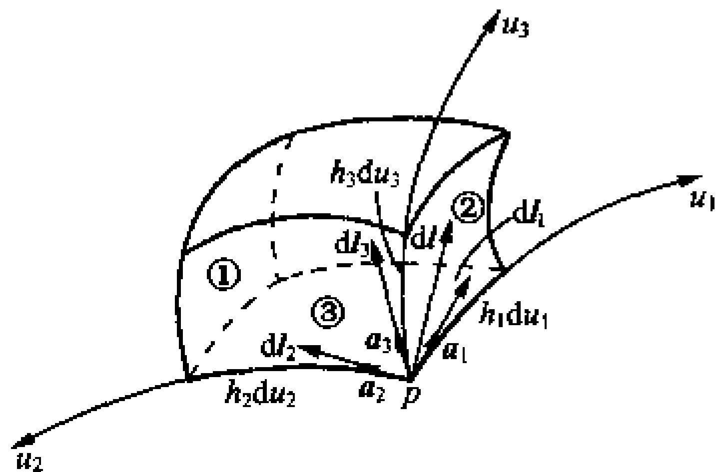


图 1.5　正交曲线坐标系

设在空间任意一点 p 沿三个坐标曲线正向的切线微元矢量分别为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_3$，则 p

点的位移微元可表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{a}_1 \mathrm{d}l_1 + \boldsymbol{a}_2 \mathrm{d}l_2 + \boldsymbol{a}_3 \mathrm{d}l_3 \\ &= \boldsymbol{a}_1 h_1 \mathrm{d}u_1 + \boldsymbol{a}_2 h_2 \mathrm{d}u_2 + \boldsymbol{a}_3 h_3 \mathrm{d}u_3 \end{aligned} \tag{1.61}$$

式中，$\mathrm{d}l_1$，$\mathrm{d}l_2$，$\mathrm{d}l_3$ 分别为 u_1 到 $u_1+\mathrm{d}u_1$，u_2 到 $u_2+\mathrm{d}u_2$，以及 u_3 到 $u_3+\mathrm{d}u_3$ 之间的弧长，即 $h_1\mathrm{d}u_1$，$h_2\mathrm{d}u_2$，$h_3\mathrm{d}u_3$。其中 h_1，h_2，h_3 称为度量因子(或拉梅系数)，它们一般是空间坐标的函数。

又因为在直角坐标系下 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_x \mathrm{d}x + \boldsymbol{a}_y \mathrm{d}y + \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}z \tag{1.62}$$

因此，若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 只沿 u_1 方向，即 u_2，u_3 都是常数，也即 $\mathrm{d}u_2 = \mathrm{d}u_3 = 0$。于是，令式(1.61)和式(1.62)相等，并利用多元函数全微分表达式，有

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{h_1 \mathrm{d}u_1} = \frac{\boldsymbol{a}_x \mathrm{d}x + \boldsymbol{a}_y \mathrm{d}y + \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}z}{h_1 \mathrm{d}u_1} = \boldsymbol{a}_x \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_1}{\partial u_1} + \boldsymbol{a}_y \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_2}{\partial u_1} + \boldsymbol{a}_z \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_3}{\partial u_1} \tag{1.63}$$

式中，$\mathrm{d}x = \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}y = \frac{\partial G_2}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}z = \frac{\partial G_3}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1$。

同样，若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 只沿 u_2 方向，则有

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{h_2 \mathrm{d}u_2} = \boldsymbol{a}_x \frac{1}{h_2}\frac{\partial G_1}{\partial u_2} + \boldsymbol{a}_y \frac{1}{h_2}\frac{\partial G_2}{\partial u_2} + \boldsymbol{a}_z \frac{1}{h_2}\frac{\partial G_3}{\partial u_2} \tag{1.64}$$

若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿 u_3 方向，则

$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{h_3 \mathrm{d}u_3} = \boldsymbol{a}_x \frac{1}{h_3}\frac{\partial G_1}{\partial u_3} + \boldsymbol{a}_y \frac{1}{h_3}\frac{\partial G_2}{\partial u_3} + \boldsymbol{a}_z \frac{1}{h_3}\frac{\partial G_3}{\partial u_3} \tag{1.65}$$

在上述表达式中，$x = G_1$，$y = G_2$，$z = G_3$。这样，只要相应坐标系的度量因子已知，则可由上面三式导出正交曲线坐标系中任一种曲线坐标系的单位矢量与直角坐标系单位矢量间的关系。应指出，之所以引出度量因子，是因为在正交曲线坐标系中，长度元的度量不一定是长度，即正交曲线坐标系中的 $\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}u_2$，$\mathrm{d}u_3$ 一般并不是长度微元。例如，在圆柱坐标系中的角度坐标 φ、圆球坐标系中的角度坐标 θ 和 φ 都不是长度。

为导出正交曲线坐标系的度量因子，考虑直角坐标系中任意一点处的位移微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，其大小可表示为

$$\mathrm{d}l = [(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿 u_1 方向，则由上式以及多元函数全微分表达式，知

$$\mathrm{d}l_1 = \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_1 = h_1 \mathrm{d}u_1$$

同样，若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿 u_2 方向，则

$$\mathrm{d}l_2 = \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial u_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_2 = h_2 \mathrm{d}u_2$$

若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿 u_3 方向，则

$$\mathrm{d}l_3 = \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial u_3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_3 = h_3\mathrm{d}u_3$$

显然，由以上三式有

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial u_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad i = 1,\ 2,\ 3$$

或

$$h_i = \left[\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{\partial G_n}{\partial u_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.66}$$

这样，将 G_1，G_2，G_3 的表达式代入上式即可求得任一种正交曲线坐标系的度量因子 h_1，h_2，h_3。同时，$\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}u_2$，$\mathrm{d}u_3$ 必须乘以相应的度量因子才能得到相应曲线坐标系的长度微元。因此，在正交曲线坐标系中任一长度微元 $\mathrm{d}l$ 可表示为

$$\mathrm{d}l = [(h_1\mathrm{d}u_1)^2 + (h_2\mathrm{d}u_2)^2 + (h_3\mathrm{d}u_3)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1.67}$$

对如图 1.6 所示的圆柱坐标系，在式(1.66)中代入 $u_1 = r$，$u_2 = \varphi$，$u_3 = z$ 以及 $x = G_1 = r\cos\varphi$，$y = G_2 = r\sin\varphi$，$z = G_3 = z$，可得 $h_1 = h_r = 1$，$h_2 = h_\varphi = r$，$h_3 = h_z = 1$。类似地，对如图 1.7 所示的圆球坐标系，$u_1 = R$，$u_2 = \theta$，$u_3 = \varphi$，以及 $x = G_1 = r\sin\theta\cos\varphi$，$y = G_2 = R\sin\theta\sin\varphi$，$z = G_3 = R\cos\theta$，于是，其度量因子为 $h_1 = h_R = 1$，$h_2 = h_\theta = R$，$h_3 = h_\varphi = R\sin\theta$。

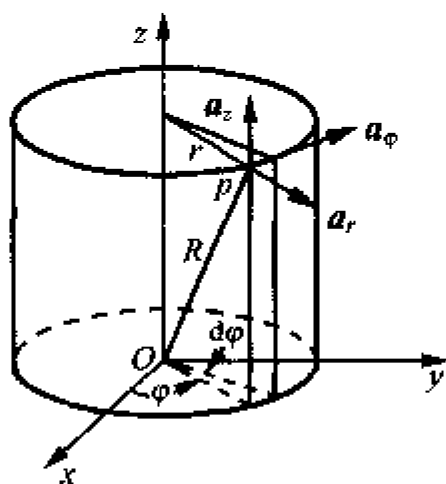


图 1.6　圆柱坐标系

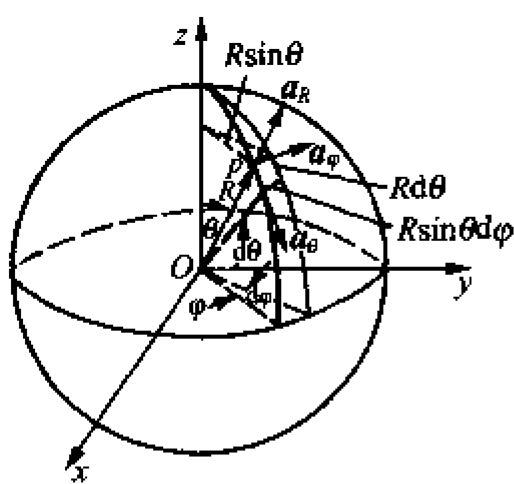


图 1.7　圆球坐标系

1.7.2　正交曲线坐标系中场论的表达式

在求解正交曲线坐标系中场论的问题时，通常需要知道坐标系的面积元和体积元的表达式。正交曲线坐标系中，$u_i = \text{cost.}$ 的曲面上面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = \mathrm{d}\boldsymbol{l}_j \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}_k = \boldsymbol{a}_i\mathrm{d}S_i = \boldsymbol{a}_i h_j h_k \mathrm{d}u_j \mathrm{d}u_k$$

式中，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k$，$i$，$j$，$k \in (1,\ 2,\ 3)$。体积元 $\mathrm{d}V$ 为

$$dV = d\boldsymbol{l}_i \cdot (d\boldsymbol{l}_j \times d\boldsymbol{l}_k) = h_i h_j h_k du_i du_j du_k$$

在直角坐标系中引出的哈密顿算子∇可推广到正交曲线坐标系，即用$\nabla\phi$表示正交曲线坐标系下ϕ的梯度，用$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$表示$\boldsymbol{A}$的散度，用$\nabla\times\boldsymbol{A}$表示$\boldsymbol{A}$的旋度。这里不作详细推导，直接写出正交曲线坐标系中部分场论的表示式。

(1) 标量ϕ的梯度为

$$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} + \boldsymbol{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} + \boldsymbol{a}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3} \tag{1.68}$$

(2) 矢量$\boldsymbol{A}$的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] \tag{1.69}$$

式中，A_1，A_2，A_3分别为$\boldsymbol{A}$在u_1，u_2，u_3上的投影。

(3) 矢量$\boldsymbol{A}$的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{a}_1 & h_2\boldsymbol{a}_2 & h_3\boldsymbol{a}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \tag{1.70}$$

(4) $\nabla^2\phi$的展开式为

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1h_3\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{1.71}$$

此式是将式(1.68)的$\nabla\phi$代替式(1.69)中的$\boldsymbol{A}$而得到的。应注意，当∇^2作用到矢量$\boldsymbol{A}$上时，应有

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{1.72}$$

利用上述各式即可得到常用正交曲线坐标系中梯度、散度、旋度以及散度定理等的表达式，附录B中给出了三种常用坐标系中的场论公式。

1.7.3 圆柱坐标系、圆球坐标系与直角坐标系的矢量之间的关系

1) 圆柱坐标系

根据前面导出的正交曲线坐标系中单位矢量与直角坐标系单位矢量间的关系式(1.63)～(1.65)，将$x = G_1 = r\cos\varphi$，$y = G_2 = r\sin\varphi$，$z = G_3 = z$代入，即得圆柱坐标系与直角坐标系单位矢量间的关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_r &= \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} = \boldsymbol{a}_x\cos\varphi + \boldsymbol{a}_y\sin\varphi \\ \boldsymbol{a}_\varphi &= \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_x\sin\varphi + \boldsymbol{a}_y\cos\varphi \\ \boldsymbol{a}_z &= \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_z \end{aligned}\right\} \tag{1.73}$$

若用矩阵表示，则为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\varphi \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1.74}$$

反之，也可导出下述关系：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\varphi \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1.75}$$

事实上，正交曲线坐标系间的变换是正交变换，而变换矩阵是正交矩阵，正交矩阵满足 $[M]^{-1}=[M]^{\mathrm{T}}$。因此，容易从式(1.74)得到式(1.75)。

应指出，上述单位矢量间的关系也可用圆柱坐标系中任意点 $p(r,\varphi,z)$ 在 xOy 平面上的投影，通过几何关系导出。当然，还可以利用求方向余弦的方法导出。

若已知直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z$$

可将此矢量 $\boldsymbol{A}$ 变换到圆柱坐标系中的表达式，即用 A_x，A_y，A_z 表示 A_r，A_φ，A_z。事实上，根据两矢量标量积的运算规则，有

$$\left.\begin{aligned} A_r &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_r = (A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z)\cdot\boldsymbol{a}_r \\ &= \cos\varphi A_x + \sin\varphi A_y + 0 \\ A_\varphi &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\varphi = -\sin\varphi A_x + \cos\varphi A_y \\ A_z &= A_z \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

此关系也可用矩阵表示，即

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1.77}$$

将式(1.74)与式(1.77)比较可知，若将式(1.74)中的单位矢量换为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的相应分量即得式(1.77)。同时，可类似地由式(1.75)导出用 A_r，A_φ，A_z 表示 A_x，A_y，A_z 的关系式。显然，两种坐标系的单位矢量间的关系与分量间的关系在形式上完全相同。这样，圆柱坐标系中矢量 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{a}_r + A_\varphi\boldsymbol{a}_\varphi + A_z\boldsymbol{a}_z$$

2）圆球坐标系

仿照圆柱坐标系单位矢量的推导思路，同样可导出圆球坐标系与直角坐标系单位矢量间的关系为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_R \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1.78}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在圆球坐标系中也可用三个分量 A_R，A_θ，A_φ 表示，即

$$\boldsymbol{A} = A_R\boldsymbol{a}_R + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\varphi\boldsymbol{a}_\varphi$$

而 A_R，A_θ，A_φ 与直角坐标系中矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量 A_x，A_y，A_z 间的关系同样满足像单位矢量间的关系，即将上而单位矢量间满足的矩阵方程中的 $\boldsymbol{a}_R$，$\boldsymbol{a}_\theta$，$\boldsymbol{a}_\varphi$ 以及 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 分别换为 A_R，A_θ，A_φ 以及 A_x，A_y，A_z 即得。

通过进一步分析，也可得到两种正交曲线坐标系（如圆柱坐标系与圆球坐标系）间的单位矢量以及矢量间的转换关系。

习　　题

1-1　已知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y - 3\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{C} = 5\boldsymbol{a}_x - 2\boldsymbol{a}_z$。

求：① $\boldsymbol{a}_A$；

② $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$；

③ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$；

④ θ_{AB}；

⑤ $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$；

⑥ $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ 和 $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$；

⑦ $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$。

1-2　已知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{a}_x + b\boldsymbol{a}_y$，若 $\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{B}$ 的模为 1，求 a，b。

1-3　若矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 是任意常矢量，证明：$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|^2 = A^2B^2 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2$。

1-4　求圆柱坐标系中从 z 轴上的 $z = z_0$ 指向点 $p(r, \varphi, 0)$ 的单位矢量。

1-5　标量函数 $u = 3x^2y^2z^2$ 在点 $p(1, 1, -1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？并求出该方向上的方向导数的值。

1-6　已知空间中有一与时间无关的电位场 $V = 3x + 2xyz - z^2 - 1$。

求：① 点 $p(0, 1, 2)$ 处垂直于等位面的单位矢量；

② 点 $p(0, 1, 2)$ 处电位变化的最大速率。

1-7　求标量函数 $\phi = 2x^2y + 3y^2z + xz^2$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处沿矢量 $\boldsymbol{l} = yz\boldsymbol{a}_x + xz\boldsymbol{a}_y + xy\boldsymbol{a}_z$ 方向的方向导数。

1-8　参照例图 1.1，设有标量 $f(R)$，求证：以 $p'(x', y', z')$ 为动点时的梯度 $\nabla' f(R)$ 与以 $p(x, y, z)$ 为动点的梯度 $\nabla f(R)$ 间满足关系：$\nabla' f(R) = -\nabla f(R)$。其中 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$。

1-9　已知一标量函数 $\phi = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{3}\right)\mathrm{e}^{-z}$。

求：① 点 $p(1, 2, 3)$ 处 ϕ 增加速率最快的方向及大小；

② 点 $p(1, 2, 3)$ 处向坐标原点方向 ϕ 增加速率（方向导数）的大小。

1-10　根据散度定义式(1.31)，证明直角坐标系下矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度表达式(1.32)。

1-11 已知 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$，$A$ 为一常量，$R=|\boldsymbol{R}|$，

求：① $\nabla\cdot\boldsymbol{R}$；

② $\nabla\times\boldsymbol{R}$；

③ $\nabla\times(\boldsymbol{R}/R)$；

④ $\nabla\cdot(A\boldsymbol{R})$。

1-12 证明：$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$。

1-13 证明旋度定理(1.47)。

1-14 在圆球坐标系中，已知 $\boldsymbol{A}=\left(\frac{\sin\theta}{R}\right)\boldsymbol{a}_R+R^2\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta+R^2\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{a}_\varphi$，求$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$。

1-15 已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y(xy)^2+\boldsymbol{a}_z(24x^2y^2z^2)$，

求：① $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$；

② $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心原点的一个单位立方体的体积分；

③ $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的面积分并验证散度定理。

1-16 已知圆柱坐标系中坐标原点至空间某一点的位置矢量为 $\boldsymbol{R}$，求 $\boldsymbol{R}$ 的微分表达式。

1-17 已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y(xy^2)$。

① 求 $\boldsymbol{A}$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分；

② 应用斯托克斯定理求解此线积分。

1-18 试在直角坐标系下证明：$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$。

1-19 若矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_R\left(\frac{\cos^2\varphi}{R^3}\right)$，$1\leqslant R\leqslant 2$，求$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$。

1-20 试证 $\nabla^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\right)=-k^2\mathrm{e}^{-jkR}$，式中 k 为常数。

1-21 已知圆柱坐标系中矢量为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_r\left(\frac{1}{r}\right)+\boldsymbol{a}_\varphi\left(\frac{2}{r}\right)$，求该矢量在直角坐标系中的表达式。

1-22 已知 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{a}_x+b\boldsymbol{a}_y+c\boldsymbol{a}_z$，写出圆柱坐标系和圆球坐标系下 $\boldsymbol{A}$ 的表达式。

1-23 已知直角坐标系中矢量为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y(xy)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$，求该矢量在圆柱坐标系中的表达式。

1-24 已知直角坐标系中矢量为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y(xy)$，求该矢量在圆球坐标系中的表达式。

1-25 已知圆球坐标系中矢量为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_R\left(\frac{2\cos\varphi}{R^3}\right)+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta$，求该矢量在直角坐标系中的表达式。

1-26 圆球坐标系中的两个矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的始点 p_1 和 p_2 的坐标分别为(R_1,θ_1,φ_1)和(R_2,θ_2,φ_2)。

① 根据 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的始端坐标，确定 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 之间的夹角的余弦 $\cos(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$；

② 求点 p_1 处的球坐标分量以及点 p_2 处的球坐标分量。

1-27 已知椭圆球坐标(ξ,η,z)与直角坐标(x,y,z)间的关系为 $x=p\cosh\xi\cos\eta$，$y=p\sinh\xi\sin\eta$，$z=z$，其中 p 为常数，为 $\xi=\text{cost.}$ 的椭圆柱面和 $\eta=\text{cost.}$ 的双曲柱面的半焦距。求这两种坐标系单位矢量间的变换矩阵$[M]$。

第2章 电磁场的基本方程和电磁场运动的基本规律

简单地说，电磁学是研究静止电荷和运动电荷的效应以及相互作用的一门学科。静止电荷产生静电场，等速运动电荷形成恒定电流，恒定电流产生恒定磁场(静磁场)，这是人们很早就认识到的电磁现象。时变电场会激发时变磁场，时变磁场也会激发时变电场，时变电磁场相互激发从而形成电磁波，这是麦克斯韦(J. C. Maxwell)于1864年提出的电磁场完整方程(称为麦克斯韦方程组)所预示的结果。因此，要全面地叙述电磁学即电磁场与电磁波的经典理论，其核心是麦克斯韦方程组，它是宏观电磁理论所遵循的基本规律。

本章首先以电磁场的基本方程为基础导出麦克斯韦方程组，然后讨论电磁场运动的基本规律。

2.1 电磁场的基本方程

2.1.1 电磁场的源——电荷和电流

所有电磁现象都起源于静止电荷和运动电荷(电流)，因此有必要引出与电荷和电流有关的概念和参量。

1) *电荷和电荷密度*

众所周知，电荷有正、负电荷之分，正电荷总是伴随着负电荷的出现而出现。所有带电体的电荷量(简称电荷)都是电子电荷量绝对值的整数倍，带电体中的电荷不仅与带电体带电量的大小有关而且与电荷分布有关。微观上，根据物质结构理论可知，带电微粒间总有空隙，带电体所带电量不是连续分布的。但宏观上，由于带电微粒间空隙的距离非常小，并考虑带电体中大量带电微粒的平均效应，因此可以近似认为带电体内的电荷连续分布。所以，可以用电荷密度来描述带电体的电荷分布。为此，定义体电荷密度为

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}=\frac{dQ}{dV} \tag{2.1}$$

式中，ΔQ是体积元ΔV内包含的总电荷量。

当电荷存在于一无限薄的薄层或截面很小的细线上时，将薄层或细线上的电荷分布分

别用面电荷密度或线电荷密度来描述较为方便。为此定义面电荷密度 ρ_S 和线电荷密度 ρ_l 分别为

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \tag{2.2}$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \tag{2.3}$$

式中，ΔQ 分别是薄层的面积元 ΔS 或细线的长度元 Δl 上的电荷量。

于是，一个体积为 V、表面积为 S 以及线长为 l 上包含的总电荷可分别对以上三式进行体、面和线积分得到，其表达式分别为

$$Q = \int_V \rho dV,\ Q = \int_S \rho_S dS,\ Q = \int_l \rho_l dl \tag{2.4}$$

2）电流和电流密度

当导体构成的闭合回路中有直流电源时，回路中便会出现恒定电流（或称恒流或直流），这个恒定电流是导体中自由电荷在电场力作用下产生的定向运动。在导体中任取一个面，则穿过此面的电流 I 定义为单位时间内穿过此面的电荷量，即

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{2.5}$$

电流的正方向规定为正电荷的运动方向（导体中自由电子逆着电场方向运动引起），这正是电路理论中所熟知的概念。在电磁理论中，通过一个表面积的电荷流的速率——体电流密度则更为有用。体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是一个矢量，它定义为：方向为导体内某点正电荷的运动方向，大小等于垂直于它的单位面积上的电流。$\boldsymbol{J}$ 的大小可表示为

$$J = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{2.6}$$

电流密度 $\boldsymbol{J}$ 决定于体电荷密度 ρ 和正电荷的运动速度。为导出它们间的关系，作一横截面为 dS，长为 dl 的圆柱状体积元，令此圆柱的轴线与正电荷运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 相平行，如图 2.1 所示。假设某瞬间体积元内部包含电荷 dQ，并经过时间 dt 后电荷全部从截面 dS 流出，则 dS

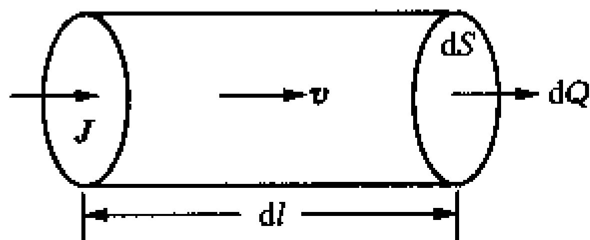


图 2.1　导体中的圆柱状体积元

上通过的电流 $I = \frac{dQ}{dt}$，将 $dt = \frac{dl}{v}$ 代入即得 $Idl = vdQ$，然后再代入 $I = JdS$ 以及 $dQ = \rho dSdl$，则有 $J = \rho v$，即体电流密度的大小等于体电荷密度与电荷运动速度的大小之积。考虑到体电流密度与速度两者方向相同，故有

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} \tag{2.7}$$

对任一表面积 S，穿过此表面的总电流 I 为

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.8}$$

在导体中自由电子的定向运动形成的电流常称为传导电流，前面讨论的就是这种情况。此外，通常将自由空间(真空)或某种气体中带电粒子的定向运动形成的电流，称为运流电流。例如真空管中电子从阴极向阳极运动或空中因风的吹动引起带电云团运动都会产生运流电流。应指出，传导电流和运流电流产生的物理机理不同，传导电流服从欧姆定律，而运流电流则不服从此定律(它不需要导体来维持电荷的流动)。后续有关章节将只讨论传导电流产生的电磁场。

3) 电荷守恒定律(电流连续性方程)

在一体电荷密度为 ρ 的带电体内任取一封闭曲面 S，设某瞬间从此封闭曲面流出的电流为 i，则由式(2.8)，有

$$i=\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于 i 代表单位时间内流出封闭曲面 S 的电荷量，因此 i 应等于 S 面内单位时间减少的电荷量 $-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，于是

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2.9}$$

这就是法拉第(M. Faraday)于 1843 年基于实验证实的电荷守恒定律的积分形式，又称为电流连续性方程(积分形式)。它表明，体积 V 内电荷的变化必然伴随着包围体积 V 的封闭面 S 上的电荷流动。

若体积 V 是静止的，则上式中对时间的微分可与体积分交换次序，并利用散度定理，有

$$\int_V \nabla\cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}V=-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

于是，对任意选取的体积 V，只有

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.10}$$

这就是电流连续性方程的微分形式。这表明，体电荷密度 ρ 的时间变化率就是电流密度的源。

当导体中流过恒定电流(直流)时，显然有

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \quad 或 \quad \nabla\cdot \boldsymbol{J}=0 \tag{2.11}$$

这表明，通过任意封闭曲面的净直流为零。这样，将上述的封闭曲面 S 收缩为一点，则可解释直流电路中的基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)电流定律，即电路节点处电流的代数和为零。

2.1.2 静态场的基本方程

1) 库仑定律与电场强度

若两个带电体的尺寸远小于带电体之间的距离，则带电体可视为点电荷。库仑定律是

关于两个点电荷之间相互作用力的定量描述，它是由法国物理学家库仑(C. A. Coulomb)于1785 年通过实验总结出的定律。

库仑定律叙述为：在真空中，两个点电荷 Q_1 和 Q_2(Q_1，Q_2 是点电荷的电荷量，为方便起见，习惯将 Q_1，Q_2 称为点电荷，以下同)之间相互作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸，作用力的大小与电量 Q_1 和 Q_2 的乘积成正比，而与这两个点电荷之间的距离 R 的平方成反比。如图 2.2 所示。用数学表达式表示，有

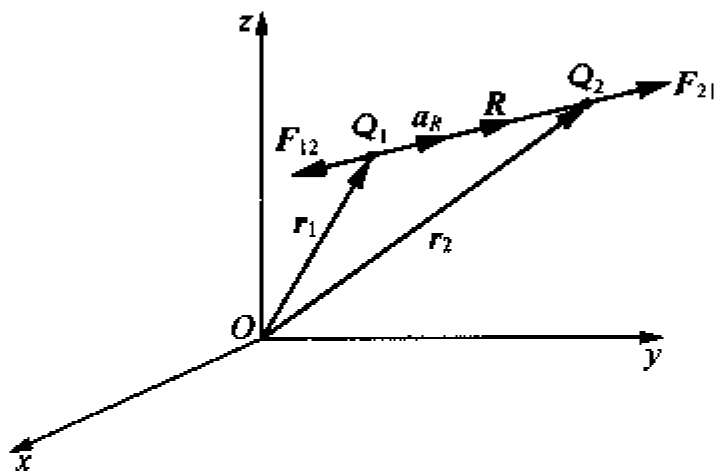


图 2.2 两个点电荷间的库仑力

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{Q_1Q_2\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\boldsymbol{a}_R\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2} \tag{2.12}$$

式中，$\boldsymbol{F}_{21}$ 表示点电荷 Q_1 作用在点电荷 Q_2 上的力，$\varepsilon_0=(1/36\pi)\times10^{-9}\approx8.854\times10^{-12}$ F/m，为真空的介电常数，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{a}_RR=\boldsymbol{a}_R|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，是 Q_1 到 Q_2 的距离矢量。

从式(2.12)可见，Q_1 对 Q_2 的作用力与 Q_2 对 Q_1 的作用力的大小相等，但方向相反，即

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$$

这同牛顿第三定律一致。

电荷周围空间存在电场，电场是客观存在的一种物质。一个点电荷之所以对另外一个点电荷产生作用力，就是因为这个点电荷在其周围空间产生电场，当另一个点电荷进入这个电场中时就会受到力的作用。换言之，电场对静止或运动的电荷都有作用力。为了定量计算电场的强弱，定义基本物理量——电场强度。

电场中某点的电场强度在量值和方向上等于一个实验电荷(一般取为单位正电荷)在该点所受的力，即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{Q_0} \tag{2.13}$$

式中，试验电荷量 Q_0 及其体积应尽可能小，从而使原电场受到的影响可忽略不计。

这样，若空间中任一点 p 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}$，则作用于该点处点电荷 Q 的作用力为

$$\boldsymbol{F}=Q\boldsymbol{E} \tag{2.14}$$

由式(2.13)，可写出真空中距点电荷 Q 的距离为 R 的 p 点处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3} \tag{2.15}$$

一般地，若真空中有 n 个点电荷，则空间中任意点 p 处的总电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i^3}\boldsymbol{R}_i \tag{2.16}$$

式中，$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$，代表从 Q_i 所在点到 p 点的距离矢量，方向由点电荷 Q_i 所在点(源点)指

向场点 p。

对真空中有限区域内连续分布的体电荷，设体电荷分布的体积为 V，则体积 V 之外的任一点 p 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{2.17}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 为 p 点的矢径，$\boldsymbol{r}'$ 为体积元 $\mathrm{d}V'$ 所在点的矢径。后续章节中，在不致于引起混淆的地方，可将体积元 $\mathrm{d}V'$ 改记为 $\mathrm{d}V$。

类似地，以线、面分布的电荷产生的电场强度的表达式也容易写出，此时只需将式(2.17)中的 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$ 分别改写为 $\rho_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l'$ 和 $\rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'$ 即可。

2) 高斯定理与电通量密度

为了更有效地描述电场，除电场强度 $\boldsymbol{E}$ 外，通常还引出另外一个场矢量 $\boldsymbol{D}$，场矢量 $\boldsymbol{D}$ 称为电通量密度(或电位移矢量)。矢量 $\boldsymbol{E}$ 是一个基本物理量，但 $\boldsymbol{D}$ 是一个人为引出的导出物理量。

由第 1 章引出的电通量的表达式可知，电通量与空间中所填充的媒质无关，其大小只与发出电通量的电荷有关。若点电荷被置于半径为 R 的球心处，则电通量线(或称电力线)必将垂直且均匀穿过球面，且单位面积上的电通量(即电通量密度)与距离 R 的平方成反比。显然，电场强度除了大小与空间填充媒质的介电常数(真空或自由空间情况为 ε_0)有关外，也满足上述特性。因此，真空中，电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 可由电场强度 $\boldsymbol{E}$ 定义为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{2.18}$$

应指出，到目前为止，我们仅限于讨论真空或自由空间的情况(由后续内容可知，对于简单媒质，$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$)。

高斯定理表明了穿过一个封闭面的电通量与这个封闭面所包围的(自由)电荷之间的关系，可叙述为：穿过真空或自由空间中任意封闭面的电通量等于此封闭面所包围的自由电荷总量，即

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \quad 或 \quad \oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.19}$$

这是由德国的高斯(K. F. Gauss)于 1839 年导出的高斯定理的积分形式。利用此定理可以方便地求解具有对称电荷分布的问题。

若体电荷分布于封闭面所包围的体积内，则式(2.19)可写成

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho\mathrm{d}V \tag{2.20}$$

对上式左端应用散度定理，则

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho\mathrm{d}V$$

此式对任意的封闭面 S 所包围的体积均应成立，因此两端体积分中的被积函数应相等。于是，在空间任一点处，可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{2.21}$$

这是高斯定理的微分形式，即空间任一点处电通量密度的散度等于该点处的体电荷密度。上述方程是麦克斯韦方程组的四个方程之一。

3) 静电场的无旋性

如前所述，静电场中试验电荷(取为单位正电荷)所受到的作用力为

$$\boldsymbol{F} = Q_0\boldsymbol{E}$$

当此试验电荷位移微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，电场力对试验电荷做的功为 $Q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，而外力克服电场力所做的功 $\mathrm{d}W = -Q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。这样，外力使试验电荷自场中 a 点移到 b 点所做的功为

$$W_{ba} = -Q_0\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.22}$$

利用此式不难证明外力做功(或电场力做功)仅取决于静电场中起点 a 和终点 b 的位置，而与 Q_0 所经过的路径无关。这样，若使 Q_0 沿闭合路径移动，则外力所做的功为

$$W_{ba} = -Q_0\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad 或 \quad \oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.23}$$

这表明，静电场中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是无旋的或保守的，即静电场是无旋场或保守场。

对式(2.23)利用斯托克斯定理，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.24}$$

上述方程也是静电场的基本方程之一。

4) 毕奥—萨伐尔定律与磁通量密度

众所周知，在 19 世纪之前，人们除了发明永久磁铁、天然磁铁以及发现磁性物质可以磁化并可用作磁铁以外，对于磁学知之甚少。直到 1820 年奥斯特(H. C. Oersted)从实验中发现载有电流的导线可使磁针偏转这一现象之后，才使电学和磁学两者联系起来，科学家们才认识到电流也是磁场的源。在奥斯特的发现后不久，法国的毕奥和萨伐尔(J. B. Biat, F. Savart)于同年又基于磁针试验建立了载流导线在其周围产生磁场的有用公式，而法国的安培(A. M. Ampere)于 1825 年发现两载流回路间存在磁场力，并通过实验建立了一组定量的关系式。

图 2.3 示出了真空中两个载直流分别为 I_1 和 I_2 的回路 l_1 和 l_2，安培总结出的回路 l_1 对回路 l_2 的作用力 $\boldsymbol{F}_{21}$ 表示为

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2} \tag{2.25}$$

此式称为安培力定律。其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 各代表两个导线回路上的长度微元矢量，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$，表示自 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 到 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 的距离矢量，且 $R = |\boldsymbol{R}|$，常数 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$，称为真空的导磁率。$\boldsymbol{F}_{21}$ 是不同于库仑力的另一种力，称为磁场力(简称为磁力)。

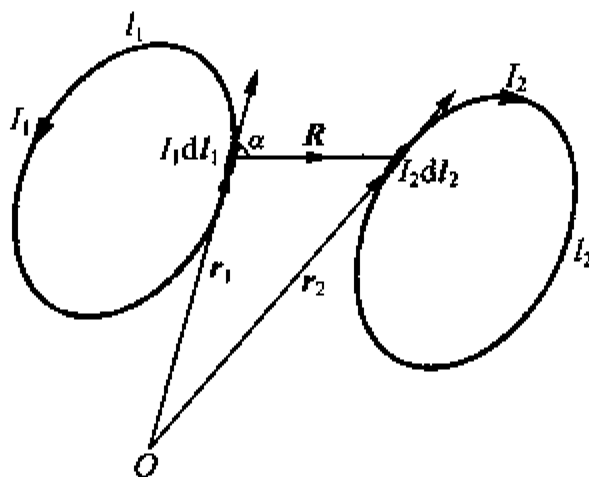


图 2.3　真空中的两个载流回路

同库仑定律类似，将式(2.25)中的下标“1”和“2”交换并将 $\boldsymbol{a}_R$ 换为 $-\boldsymbol{a}_R$，即得到回路 l_2 作用于回路 l_1 的力 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$。

为导出毕奥--萨伐尔定律，将式(2.25)改写成

$$\boldsymbol{F}_{21}=\oint_{l_2} I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{a}_R}{R^2}\right)=\oint_{l_2} I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}_1 \tag{2.26}$$

式中

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{a}_R}{R^2} \tag{2.27}$$

其大小为

$$B_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{I_1 \mathrm{d}l_1 \sin\alpha}{R^2} \tag{2.28}$$

而 α 是 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_R$ 之间小于180°的夹角。$\boldsymbol{B}_1$ 可视为回路 l_1 作用于回路 l_2 的单位电流元($|I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2|=1\ \mathrm{A\cdot m}$)上的磁场力，它是表征电流回路 l_1 在其周围建立磁场特性的一个基本物理量，称为磁通量密度(或磁感应强度)，其单位是特斯拉(T)。应注意：$1\ \mathrm{T}=1\ \mathrm{Wb/m^2}$。

一般地，当载流导体置于外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中时，导体所受的磁场力为

$$\boldsymbol{F}=\oint_l I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{2.29}$$

因 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=JS\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$($S$ 为导体截面积)，则上式可表示为

$$\boldsymbol{F}=\int_V \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \tag{2.30}$$

这是安培力定律的一般形式。若在上式中用 $\boldsymbol{J}_S\mathrm{d}S$ 代替 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$，则可得分布于曲面 S 上的面电流在外磁场中所受磁力的表达式。

若运动速度为 v($v\ll c$，c 为真空中的光速)，电荷密度为 ρ 的体电荷在磁通量密度为 $\boldsymbol{B}$ 的磁场中运动，因 $\mathrm{d}Q=\rho S\mathrm{d}l$($S$ 为载流导体的截面积)，$\boldsymbol{J}\mathrm{d}V=\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\boldsymbol{v}\mathrm{d}Q$，则电荷微元 $\mathrm{d}Q$ 所受的磁力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}Q\times\boldsymbol{B} \tag{2.31}$$

显然，上式对点电荷 Q 在磁场中运动所受的磁力同样适用。

类似于磁力的计算公式，若电流以体密度 $\boldsymbol{J}$ 分布在体积 V 内或以面密度 $\boldsymbol{J}_S$ 分布于曲面 S 上，则体电流及面电流在真空或自由空间中产生的磁通量密度分别为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V \tag{2.32}$$

以及

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\boldsymbol{J}_S\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}S \tag{2.33}$$

5) 磁通量与磁通连续性原理

磁通量密度对一个曲面的面积分称为磁通量密度穿过此曲面的通量，简称为磁通量，记为 Φ。即

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.34}$$

显然,若磁通量密度与曲面的表面相切,则穿过此曲面的磁通量一定为零。

因为自然界中磁体的南北极不能分开,因此由磁体北极出发的磁力线的条数应正好等于进入南极的磁力线的条数,这表明磁力线永远是闭合的。这样,闭合的磁力线穿过封闭面多少条,也必然从封闭面穿出多少条。换言之,穿过任一封闭曲面的磁通量恒等于零。即

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.35a}$$

这就是磁通连续性原理的积分形式,或称为磁的高斯定理(积分形式)。将上式左端利用散度定理,可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.35b}$$

这是磁通连续性原理的微分形式。由于 $\boldsymbol{B}$ 的散度永远为零,因此磁场是无散场或称管形场。上述方程是麦克斯韦方程组中的四个方程之一。

6) 安培环路定律与磁场强度

安培环路定律叙述为:真空中,磁通量密度沿任一封闭曲线 l 的线积分等于此封闭曲线 l 所包围的电流,即

$$\oint_l \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{2.36a}$$

或

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \tag{2.36b}$$

类似于静电场中电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 的定义,将真空或自由空间的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 定义为

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \tag{2.37}$$

$\boldsymbol{H}$ 是磁场的一个导出物理量。应指出,对简单媒质,$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu$,其中 μ 为简单媒质的导磁率。于是,式(2.36a)可写为

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{2.38}$$

这是安培于 1823 年基于试验导出的安培环路定律的积分形式。利用此定律可以方便地求解一些具有对称电流分布的磁场问题。

若封闭曲线 l 所包围的电流是以体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 分布的,将式(2.38)右端用体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的面积分表示,有

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

再将等号左端的线积分利用斯托克斯定理化为面积分,得

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.39}$$

由于曲面 S 是闭曲线 l 所包围的任意开曲面，因此，必有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{2.40}$$

这是安培环路定律的微分形式，它说明磁场存在旋涡源 $\boldsymbol{J}$。

2.1.3 电磁感应定律与全电流定律

1) 电磁感应定律

如前所述，静态的电场和磁场由静止电荷与运动电荷或恒定电流产生，静电场是保守场，而静磁场是管形场；静电场和静磁场可单独存在，两者间没有任何联系。但是随着时间变化的时变电场和时变磁场是相互联系的，即时变电场可由时变磁场产生，反之亦然。法拉第(M. Faraday)于 1831 年在实验中首次观察到，一个导线回路所交链的磁通量随时间变化时，回路中就感应一个电动势，且感应电动势的大小正比于磁通量的时间变化率。感应电动势的极性由楞次(E. Lenz)定律决定，楞次定律指出，感应电动势以及由它引起的感应电流力图使回路所交链的磁通量保持不变。法拉第的实验结果和楞次定律相结合就称为法拉第电磁感应定律(简称为电磁感应定律)。其数学表达式为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{2.41}$$

由于导线回路内维持电流必须在此导体内存在电场，因此，可以用导体内的感应电场强度来定义感应电动势，即

$$\mathscr{E} = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.42}$$

式中，积分路径 $\boldsymbol{l}$ 是沿着导线回路的感应电流方向。若闭曲线 l 所包围的总磁通量为 $\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则式(2.41)可表示为

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.43}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向与闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 的绕行方向间满足右手关系。这表明，感应电场强度沿任意闭曲线的线积分等于该路径所交链磁通量的时间变化率的负值。应指出，前面的结论是假设存在闭合导线回路情况下得出的。事实上，对感应电动势而言，形成封闭曲线的环路不一定是导电的，若闭曲线是在自由空间(或绝缘介质)中，则感应电动势依然存在。

由于导线回路内磁通量的变化可以由磁场随时间变化引起，也可以由回路本身在磁场中运动引起，因此，当导线回路在时变磁场中以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时，则总的感应电动势可表示为

$$\mathscr{E} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.44}$$

式中，右端第一项表示磁场随时间变化引起的“感生”电动势；第二项表示回路运动引起的“动生”电动势。

将式(2.42)代入式(2.44)，并运用斯托克斯定理，得

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_S [\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})] \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.45}$$

由于 S 是由同一闭曲线 l 决定且是任意的，从而有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.46}$$

若回路是静止的，则由上式，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.47}$$

此式称为电磁感应定律的微分形式。它表明，随时间变化的磁场将激发电场。这是麦克斯韦方程组的四个方程之一。显然，感应电场是旋涡场，不是保守场，这一点同库仑电场不同。

2) 全电流定律

对静磁场，由安培环路定律的微分形式(2.40)，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{2.48}$$

但对时变电场，$\nabla \cdot \boldsymbol{J}$ 不一定为零。事实上，由电流连续性方程知 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}$ 应满足式(2.10)，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

由于时变电荷的存在不能总使上式右端为零，即一般情况下，$\boldsymbol{J}$ 不可能是无散的。因此，式(2.40)不适用于时变场。这说明，由静磁场得出的安培环路定律不能直接用于时变场，必须加以修正。

麦克斯韦首先注意到上述矛盾，并指出应将$\frac{\partial \rho}{\partial t}$加到式(2.48)的第一个等号的右端，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

在上式中，再利用高斯定理，得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

于是可得安培环路定律的修正形式，即

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.49}$$

显然，此式同安培环路定律不同的是引入了一个附加项 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$，此附加项是满足电荷守恒定律

的结果。$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$具有电流密度的量纲，按习惯将其称为位移电流密度。记此附加项为$\boldsymbol{J}_d$，有

$$\text{总电流密度} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_d = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

因此，通常将式(2.49)称为安培-麦克斯韦全电流定律(简称全电流定律)的微分形式。它表明，除传导电流外，时变电场也激发磁场。

对式(2.49)两端取开曲面积分，并对左端运用斯托克斯定理，便得到式(2.49)的积分形式，即

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.50}$$

全电流定律的引出是麦克斯韦的杰出贡献之一，它导致了统一的电磁场理论。尽管全电流定律是麦克斯韦受到法拉第的实验和“力线”概念的启发提出的，但正是由于位移电流概念的引入，才使麦克斯韦能够预言电磁场在空间以波的形式传播。

2.1.4 麦克斯韦方程组与边界条件

1) 微分形式的麦克斯韦方程组

综合前面的讨论，将电磁场的四个基本方程汇集起来即构成了以下微分形式的麦克斯韦方程组：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(电磁感应定律)} \tag{2.51a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \text{(全电流定律)} \tag{2.51b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{(磁通连续性原理)} \tag{2.51c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad \text{(高斯定理)} \tag{2.51d}$$

上式既适用于时变场也适用于静态场，它是宏观电磁场普遍适用的电磁场基本方程的微分形式。通常将上式称为微分、瞬时形式非限定性的麦氏方程组。应注意：上述表达式中，严格地说，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$等物理量均应记为$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$等，为方便起见均已简写。

应指出：① 式(2.51a)中的$\boldsymbol{E}$是指时变磁场所激发的感应电场，而式中的$\boldsymbol{E}$也包含由自由电荷产生的库仑电场，这是因为对库仑电场而言，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$；② 对于静态场，式(2.51b)中的$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$，故此式变为安培环路定律；③ 式(2.51c)对静态场和时变场均成立，尽管对时变场而言，位移电流为磁场增加了一个旋涡源，但并不影响磁场的散度，即磁通的连续性；④ 式(2.51d)中的电通量密度$\boldsymbol{D}$既包含库仑电场也包含感应电场，这是因为感应电场是无散场。因此，对静电场和静磁场而言，只要将上述四个方程分别简化为各自对应的两个方程，即得它们的基本方程(组)。

方程组(2.51)中的四个方程的物理意义依次为：①时变磁场激发时变电场；②传导电流

和时变电场均激发时变磁场；③穿过任一封闭面的磁通量恒等于零；④穿过任一封闭面的电通量等于此封闭面所包围的自由电荷量。结合①和②可知，时变电磁场可互相激发，电磁场能量从一种场连续不断地转换成另一种场，使电磁场像波浪一样由场源通过任意媒质向远处传播出去。这种现象为赫兹(H. R. Hertz)于 1880 年通过实验所证实，这同样也证明了麦克斯韦的预言，为当今蓬勃发展的无线电通信奠定了理论基础。

还应指出，麦氏方程组中四个方程并非都是独立的，只有前两个旋度方程是独立方程。同样，麦氏方程组中两个场源 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 也只有一个是独立的，因为 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 间满足电流连续性方程。

2) 本构关系

本构关系指的是场量与场量间的关系，它决定于电磁场存在媒质的特性。由麦氏方程求解媒质中的电磁场，还需媒质对应的本构关系。自然界中，媒质是各种各样的，最简单的媒质是线性、均匀和各向同性的媒质，这种媒质称为简单媒质。所谓线性媒质，是指媒质的参数与场强的大小无关；均匀媒质，是指媒质参数与位置无关；各向同性媒质，是指媒质参数与场强的方向无关。此外，若媒质参数与频率无关，则称为非色散媒质，反之则为色散媒质。对简单媒质而言，其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{2.52}$$

式中，ε 称为介电常数，单位为 F/m；μ 称为导磁率，单位为 H/m；σ 称为电导率，单位为 S/m，它们均为常数。特别地，对真空或自由空间，$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，$\sigma=0$。$\sigma=0$ 的媒质称为理想媒质(介质)；$\sigma=\infty$ 的媒质(导体)称为理想导体；σ 介于 0 和 ∞ 之间的媒质称为导电媒质，σ 足够大的导电媒质一般称为良导体(详见第 4 章)。

利用式(2.52)中的前两式，麦氏方程组(2.51)变为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2.53a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.53b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{2.53c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.53d}$$

上式称为微分、瞬时形式限定性的麦氏方程组，因为这个方程组只适用于特定的媒质。

3) 积分形式的麦氏方程组

将两个旋度方程(2.51a)和(2.51b)的两边分别取开曲面积分，并在等号左端应用斯托克斯定理，得

$$\oint_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.54a}$$

$$\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.54b}$$

类似地，将两个散度方程(2.51c)和(2.51d)的两边分别取体积分，并在等号左端应用散

度定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.54c}$$

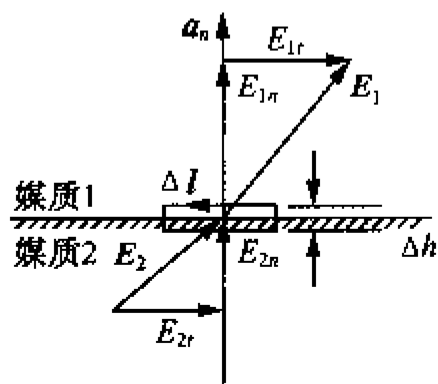
$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV \tag{2.54d}$$

利用积分形式的麦氏方程组(2.54)可导出不同媒质交界面处电磁场的边界条件。

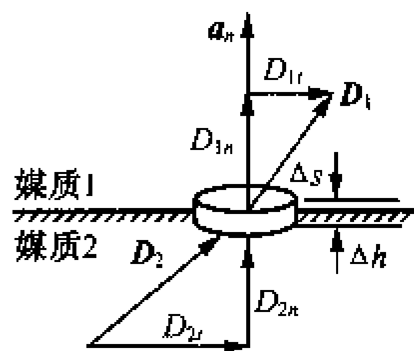
4）边界条件

利用麦氏方程组求解不同媒质构成的边值问题时，需要知道两种不同媒质分界面处电磁场应满足的关系，即边界条件。微分形式的麦氏方程组描述的是空间各点处电磁场的分布规律，它要求场量处处可微。由于在媒质分界面两侧媒质的电参数 μ, ε 以及 σ 有突变使场量失去可微性，因此微分形式的麦氏方程组不能用来推导边界条件。但场量在媒质分界面处仍保持可积性，故可利用积分形式的麦氏方程组来导出边界两侧电磁场间的关系——边界条件。

考虑如图 2.4 所示的两种媒质分界面的情况。跨越如图 2.4(a)所示的分界面的两侧作小(矩形)闭合回路，闭合回路由两条长度为 Δl 紧贴边界的线段和两条较短的长度为 Δh 的线段构成，其 Δh 为一高阶微量，小闭合回路所包围的面积 $\Delta S = \Delta l \Delta h$ 也为高阶微量。将积分形式的麦克斯韦第一方程(2.54a)应用于此闭合回路，并考虑所取的小闭合回路围线长度很小，故沿此闭合回路围线上各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可视为相同，又因 Δh 是高阶微量，故小闭合回路两短边上的积分可忽略不计。于是



(a) 分界面处的电场强度$\boldsymbol{E}$



(b) 分界面处的电通量密度$\boldsymbol{D}$

图 2.4　两种媒质分界面处的边界条件

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{l} - \boldsymbol{E}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{l} = E_{1t}\Delta l - E_{2t}\Delta l = -\int_{\Delta S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.55}$$

上述结果是因为 $\Delta S \to 0$ 时，$\int_{\Delta S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$ 可忽略不计。从面，由式(2.55)可得电场强度$\boldsymbol{E}$的切向分量应满足的边界条件：

$$E_{1t} = E_{2t} \quad 或 \quad \boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{2.56}$$

式中，$\boldsymbol{a}_n$ 为交界面上从媒质 2 指向媒质 1 的单位法向矢量。

类似地，将积分形式的麦克斯韦第二方程(2.54b)应用于类似图 2.4(a)的小闭合回路，得

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_{1t}\Delta l - H_{2t}\Delta l = i + \int_{\Delta S} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = J_S \Delta l \tag{2.57}$$

式中，当 $\Delta S \to 0$ 时，$\int_{\Delta S} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可忽略不计。但当边界面上存在面电流时(当时变场的频率较高时，理想(良)导体的趋肤深度趋于零，其电流仅分布在导体表面处极薄的表层内)，则小闭合回路包围的电流 $i = J_S \Delta l$，其中$\boldsymbol{J}_S$ 是与小闭合回路包围的面积 ΔS 相垂直方向上的传导电流密度，其方向与 $\Delta\boldsymbol{l}$方向满足右手螺旋关系。于是，由式(2.57)可得磁场强度$\boldsymbol{H}$的切向分量应满足的边界条件：

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S \tag{2.58}$$

为导出电位移矢量$\boldsymbol{D}$和磁感应强度$\boldsymbol{B}$的法向分量满足的边界条件，在如图 2.4(b)所示的分界面上作一圆柱状的扁平封闭面，此封闭面的顶面和底面分别位于边界的两侧。假设封闭面的顶面和底面的面积均为 ΔS，封闭面所包围的自由电荷为 ΔQ 且分布于交界面上。因封闭面的顶面和底面足够小，故穿过扁平圆柱截面上的电通量密度可视为常数，并令圆柱面的高度 Δh 趋于零，其侧面积可忽略不计。将式(2.54d)应用到此圆柱面上，有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{a}_n \Delta S - \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{a}_n \Delta S = (D_{1n} - D_{2n})\Delta S = \Delta Q$$

于是，得

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{2.59}$$

式中，$\rho_S = \Delta Q / \Delta S$，表示分界面上的自由面电荷密度。

同理，将式(2.54c)应用到此圆柱面上，同样忽略穿过圆柱侧面的磁通量以及圆柱截面上的磁通量密度视为常数，有

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{B}_2)\Delta S = (B_{1n} - B_{2n})\Delta S = 0$$

于是，得

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{2.60}$$

由式(2.56)～式(2.60)可见：在分界面处，$\boldsymbol{E}_1$ 和$\boldsymbol{E}_2$ 的切向分量连续(相等)；在分界面处的任意点$\boldsymbol{H}_1$ 和$\boldsymbol{H}_2$ 的切向分量不连续，其差值等于该点处的面电流密度；在分界面处任意点的$\boldsymbol{D}_1$ 和$\boldsymbol{D}_2$ 的法向分量不连续，其差值等于该点处的面电荷密度；在分界面处，$\boldsymbol{B}_1$ 和$\boldsymbol{B}_2$ 的法向分量连续。

在应用边界条件时，应注意以下情况：①理想导体内时变电磁场为零(因理想导体内体电荷密度为零，故 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = 0$。在时变场情况下，同样有 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} = 0$，否则在理想导体中产生感应电动势，从而形成极大的涡流)，理想导体表面上 ρ_S 和 $\boldsymbol{J}_S$ 可以存在；②两种理想电介质交界面处$\boldsymbol{J}_S$ 为零，而当两种理想电介质的交界面没有放置附加电荷时，其 ρ_S 也为零。

在求解电磁场边值问题时，有两种特殊的边界应用较多。下面引出这两种特殊的边界。

(1) 两种理想介质的边界

在两种理想介质的交界面上，因不存在面电流和面电荷，从而可得到以下边界条件：

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ H_{1t} &= H_{2t} \\ D_{1n} &= D_{2n} \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned} \quad \text{或} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) &= 0 \\ \boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) &= 0 \\ \boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) &= 0 \\ \boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) &= 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

(2) 理想介质与理想导体的边界

设第一种媒质为理想介质，第二种媒质为理想导体。因理想导体中不存在电磁场，即 $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{H}_2 = 0$。于是，有

$$\begin{aligned} E_{1t} &= 0 \\ H_{1t} &= J_S \\ D_{1n} &= \rho_S \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned} \quad \text{或} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{E}_1 &= 0 \\ \boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{H}_1 &= \boldsymbol{J}_S \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{D}_1 &= \rho_S \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{B}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

这表明，在理想导体表面处，电场的切向分量为零，磁场的法向分量为零。

2.2 坡印亭定理和坡印亭矢量

2.2.1 坡印亭定理

电磁场中存在着能量，时变电磁场中的能量守恒定律就是下面要导出的坡印亭定理，此定理可由麦克斯韦两个旋度方程导出。

将方程(2.51a)、(2.51b)代入以下场论恒等式：

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

可得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) - \boldsymbol{E} \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

或

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \tag{2.63}$$

这就是坡印亭(J. H. Poynting)于 1884 年提出的坡印亭定理的微分形式。将此式两端对封闭面 S 所包围的体积 V 作体积分，并在等式左端利用散度定理，即得

$$-\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\right) \mathrm{d}V \tag{2.64}$$

这是坡印亭定理的积分形式。

对简单媒质，因 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$，且

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.65a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.65b}$$

故式(2.64)可写为

$$\begin{aligned}-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\int_V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)\mathrm{d}V+\int_V\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}\mu H^2+\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)\mathrm{d}V+\int_V\sigma E^2\mathrm{d}V\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(w_m+w_e)\mathrm{d}V+\int_V p_\sigma\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{2.66}$$

式中，$w_m=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})/2=\mu H^2/2$，表示瞬时电场能量密度，单位为 $\mathrm{J/m^3}$；$w_e=(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})/2=\epsilon E^2/2$，表示瞬时磁场能量密度，单位为 $\mathrm{J/m^3}$；$p_\sigma=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=\sigma E^2$，表示传导电流引起的热损耗瞬时功率密度，单位为 $\mathrm{W/m^3}$。

式(2.66)表明，体积 V 中电磁场能量随时间的增加率与热损耗功率(即单位时间内以热能形式损耗在体积 V 中的能量)之和等于单位时间内穿过封闭面积 S 进人体积 V 的能量。对静态场，式(2.66)变为

$$-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\sigma E^2\mathrm{d}V \tag{2.67}$$

它表明，穿过封闭面 S 流人体积 V 的功率等于体积 V 内的功率损耗。

2.2.2 坡印亭矢量

由式(2.66)的等式左端可知，矢量积 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 具有功率密度量纲，因此，定义

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)\quad 或\quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{2.68}$$

它表示单位面积的瞬时功率流，单位为 $\mathrm{W/m^2}$。$\boldsymbol{S}$ 的方向是功率流的方向，$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足右手螺旋关系，即当右手四指从 $\boldsymbol{E}$ 转向 $\boldsymbol{H}$ 时，大拇指所指的方向即为 $\boldsymbol{S}$ 的方向。$\boldsymbol{S}$ 称为坡印亭矢量(或功率(功率流)密度矢量或能流密度矢量)。

当电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 都是时间的周期函数时，定义时间平均的能流密度矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}t \tag{2.69}$$

式中，T 为周期。

利用坡印亭矢量容易解释许多电磁现象。例如通过对载流平行双导体传输线之间的电磁场的分析，可解释平行双导线的传输功率是通过两导线间的电磁场传送的，面平行双导线

本身只起到导引电磁场的作用。对有耗传输线，平行双导线在导引电磁场的过程中会带来一定的功率损耗。

例 2.1 已知一根长为 l，半径为 b，电导率为 σ 的实心导体沿其轴向（z 向）载有均匀分布的直流电流 I。求导体表面处的坡印亭矢量，并验证坡印亭定理。

解：① 因实心导体的截面为 πb^2，故导体表面的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在圆柱坐标系中的表达式分别为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \boldsymbol{a}_z \frac{I}{\sigma \pi b^2},\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{I}{2\pi b}$$

于是，导体表面处的坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{a}_r \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

它的方向垂直于导体表面，沿径向指向导体内部。

② 为验证坡印亭定理，将 $\boldsymbol{S}$ 沿长度为 l 的圆柱表面作面积分，得

$$-\oint_S \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_{S_S} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{a}_r \mathrm{d}S = \int_{S_S} \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} \mathrm{d}S = \frac{2\pi b l I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} = I^2 \left(\frac{l}{\sigma\pi b^2}\right) = I^2 R \quad (2.70)$$

式中，S_S 表示圆柱的侧面，$R = l/\sigma\pi b^2$。

又因实心导体内的热损耗功率为

$$\int_V p_\sigma \mathrm{d}V = \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}V = \int_V \frac{J^2}{\sigma} \mathrm{d}V = \frac{\pi b^2 l I^2}{\sigma\pi^2 b^4} = I^2 \frac{l}{\sigma\pi b^2} = I^2 R \quad (2.71)$$

可见，流入实心导体表面的电磁功率正好等于导体内部的热损耗功率。显然，适用于静态场的坡印亭定理(2.69)成立。

2.3 波动方程与电磁位函数

2.3.1 波动方程

为简单起见，设电磁波处于稳定的理想媒质（即媒质的 μ，ε 与 t 无关，且 $\sigma = 0$）中。这样，可利用限定性的麦氏方程组(2.53)导出瞬时场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的矢量波动方程。

对式(2.53a)的两端取旋度，并利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$，得

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H})$$

再将式(2.53b)和式(2.53d)代入上式，有

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} \quad (2.72)$$

类似地，对式(2.53b)的两端取旋度，并利用矢量恒等式，得

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\nabla^2\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

再将式(2.53a)和式(2.53c)代入，有

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\boldsymbol{J} \tag{2.73}$$

式(2.72)和式(2.73)即为瞬时场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的有源矢量波动方程，或称为非齐次矢量波动方程。

特别地，若电磁波存在于没有场源的区域内(即在研究的区域内 $\boldsymbol{J}=0$, $\rho=0$)，则式(2.72)和式(2.73)变为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{2.74}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0 \tag{2.75}$$

这是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的无源矢量波动方程，或称为齐次矢量波动方程。

以后将会看到，上述齐次矢量波动方程的解表示一种电磁波动，电磁波的传播速度就是媒质的光速 $v(=1/\sqrt{\mu\varepsilon})$。若电磁波在真空或自由空间中传播，则 $v=c\approx3\times10^8\ \mathrm{m/s}$，其中 c 为真空中的光速。

2.3.2 电磁位函数及其方程

从式(2.72)和式(2.73)可见，场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 与场源间的关系相当复杂，因此通常不直接求解这两个方程，而是引入位函数间接地求解 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。引入位函数的目的，是使有源矢量波动方程的求解变为较简单的位函数方程的求解。在所有的电磁位函数中矢量磁位和标量电位最为常用，下面仅介绍这两种位函数以及它们所满足的方程。

由式(2.51c)可知，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。由于 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$，因此可令

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.76a}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 称为矢量磁位，对简单媒质有

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{2.76b}$$

将式(2.76a)代入麦氏第一旋度方程，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

或

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{2.77}$$

由于$\nabla\times\nabla\phi=0$，因此可定义一标量位函数ϕ，使

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi \quad 或 \quad \boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.78}$$

式中，ϕ称为标量电位，或称为电标位，而$\nabla\phi$前面的负号是考虑到静电场情况下$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$引出的。

将式(2.76b)和式(2.78)代入麦氏第一旋度方程，可得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

再利用矢量恒等式，则得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{2.79}$$

根据亥姆霍兹定理，要惟一地确定一矢量场，必须定义其散度和旋度。前面已定义了$\boldsymbol{A}$的旋度，因此还必须规定$\boldsymbol{A}$的散度，这样$\boldsymbol{A}$才是确定的。$\boldsymbol{A}$的散度可任意选取，此附加条件又称为规范条件，不同的场合可选用不同的规范条件。由式(2.79)可见，若令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{2.80}$$

则式(2.79)右端的第二项消失，从而得到

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{2.81}$$

这就是矢量磁位$\boldsymbol{A}$满足的非齐次矢量波动方程。而式(2.80)称为矢量磁位的洛仑兹(Lorentz)规范，或称洛仑兹条件。

对于标量电位函数ϕ，将式(2.78)代入麦氏方程(2.53d)，得

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.82}$$

再将洛仑兹条件(2.80)代入上式，即得

$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.83}$$

式(2.81)和式(2.82)称为$\boldsymbol{A}$和ϕ的非齐次矢量波动方程。可见，这两个方程比$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$满足的方程(2.73)和(2.74)都要简单得多，从而便于求解。方程(2.81)和(2.83)的求解，详见第6章中6.1节的内容。

在电磁场理论中，多数场合采用洛仑兹规范，但少数场合也采用库仑规范，此时规定

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{2.84}$$

此式也称为库仑条件。这样，将上式代入式(2.79)和式(2.82)，可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.85}$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.86}$$

可见,在库仑规范中,$\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 满足的两个方程并不是分离的,它们构成相互关联的方程组。但对于无源区域,采用库仑规范可使问题的求解得到简化。因此时 $\nabla^2\phi = 0$,故可令 $\phi = 0$ 为该方程的特解,于是电场强度可表示为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.87}$$

从而使求解变得简单。

2.4 对偶形式的电磁场方程

如前所述,只有电荷和电流能够产生电磁场,电磁场和电磁波的场源只有电荷和电流。因为自然界中并不存在任何磁荷,因而也并不存在磁流。但在电磁场理论中,为方便求解某些问题,人们通常人为地引人等效磁荷和磁流。若只考虑由电型源(电荷和电流)产生的电磁场,则麦氏方程组为

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E}_e &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}_e}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_e &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_e &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D}_e &= \rho \end{aligned} \tag{2.88}$$

式中,$\boldsymbol{E}_e$,$\boldsymbol{D}_e$,$\boldsymbol{H}_e$,$\boldsymbol{B}_e$ 仅由 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 产生。

类似地,若只考虑由磁型源(即磁荷和磁流)产生的电磁场,则麦氏方程组为

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E}_M &= -\boldsymbol{J}_M - \frac{\partial \boldsymbol{B}_M}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_M &= \frac{\partial \boldsymbol{D}_M}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_M &= \rho_M \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D}_M &= 0 \end{aligned} \tag{2.89}$$

式中,$\boldsymbol{E}_M$,$\boldsymbol{B}_M$,$\boldsymbol{D}_M$,$\boldsymbol{H}_M$ 仅由 ρ_M 和 $\boldsymbol{J}_M$ 产生。

当源既有电型源又有磁型源时,则有以下对偶形式的麦氏方程组:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{J}_M \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= \rho_M \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \end{aligned} \tag{2.90}$$

式中,$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 为既有电型源又有磁型源产生的总的场量。

比较电型源和磁型源对应的麦氏方程组可见,若将电型源的量(电源量)与磁型源的量(磁源量)互换,即将方程组(2.89)中的 $\boldsymbol{H}_M$, $\boldsymbol{E}_M$, $\boldsymbol{J}_M$, μ 及 ε 分别用 $\boldsymbol{E}_e$, $-\boldsymbol{H}_e$, $\boldsymbol{J}$, ε 及 μ 代替,则得方程组(2.88),反之亦然。这说明电与磁之间存在对偶性,即电型源产生的场与磁型源产生的场在形式上对偶,这就是电磁对偶性原理。利用电磁对偶性原理,可由矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量电位 ϕ 满足的关系式及波动方程直接引出磁型源对应的量——矢量电位 $\boldsymbol{A}_M$ 及标量磁位 ϕ_M 满足的关系式和方程:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}_M &= -\nabla\times\boldsymbol{A}_M \\ \boldsymbol{H}_M &= -\nabla\phi_M - \frac{\partial \boldsymbol{A}_M}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{A}_M - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_M}{\partial t^2} &= -\varepsilon\boldsymbol{J}_M \\ \nabla^2\phi_M - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi_M}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_M}{\mu} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}_M + \mu\varepsilon\frac{\partial\phi_M}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.92}$$

2.5 时谐(正弦)电磁场的复数表示

时谐电磁场是时变电磁场的一种重要类型,在这种场中,瞬时场矢量如 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 的每一个坐标量都以单一频率随时间作正弦变化。我们知道,人们在电路理论中采用相量(即复数)来表示随时间作正弦变化的电压和电流,给正弦交流电路分析带来很大的方便。与正弦交流电路的相量表示类似,采用复数表示时谐电磁场也同样会给时谐场的分析带来方便。

为简便起见,设直角坐标系中时谐电磁场的电场强度瞬时矢量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(t) &= \boldsymbol{a}_x E_x(t) + \boldsymbol{a}_y E_y(t) + \boldsymbol{a}_z E_z(t) \\ &= \boldsymbol{a}_x E_x\cos(\omega t+\varphi_x) + \boldsymbol{a}_y E_y\cos(\omega t+\varphi_y) + \boldsymbol{a}_z E_z\cos(\omega t+\varphi_z) \end{aligned} \tag{2.93}$$

式中,E_x, E_y, E_z 分别为瞬时场矢量 $\boldsymbol{E}$ 在 x, y, z 方向的分量,它们可写为

$$E_i(t) = \mathrm{Re}[E_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{E}_i e^{j\omega t}],\ i = x,\ y,\ z \tag{2.94}$$

而 Re[·]表示取括弧内(复变)函数的实部;$\dot{E}_i = E_i e^{j\varphi_i}$, $i = x, y, z$,分别称为复振幅。这样,时谐电磁场的复数表示式是一个仅为空间坐标的复变函数,与时间 t 无关。

于是,式(2.93)写为

$$\boldsymbol{E}(t) = \mathrm{Re}\{[\boldsymbol{a}_x\dot{E}_x + \boldsymbol{a}_y\dot{E}_y + \boldsymbol{a}_z\dot{E}_z]e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}e^{j\omega t}] \tag{2.95}$$

式中,$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{a}_x\dot{E}_x + \boldsymbol{a}_y\dot{E}_y + \boldsymbol{a}_z\dot{E}_z$,称为电场强度复矢量。由式(2.94)可见,若已知场量的复数表达式(如 $\dot{E}_x$),将其乘以时间因子 $e^{j\omega t}$,然后取实部即得瞬时场量表达式(如 $E_x(t)$)。反

之，由瞬时场量表达式也容易写出其复数表达式。此外，由式(2.95)还可看出，电场强度瞬时矢量对时间的一阶和二阶偏导数分别为

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{Re}[j\omega \dot{\boldsymbol{E}} e^{j\omega t}],\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mathrm{Re}[(-\omega^2)\dot{\boldsymbol{E}} e^{j\omega t}]$$

这表明，$\boldsymbol{E}$ 对时间的微分(或积分)运算可化为对复矢量 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的代数运算，这正是采用复数表示场矢量的便利之处。

2.5.1　复数形式的麦氏方程组

利用复数表示法分析时谐电磁场时，需要复数形式的麦克斯韦方程组。将式(2.95)的 $\boldsymbol{E}(t)$ 的复数表示式与 $\boldsymbol{D}(t)$，$\boldsymbol{H}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$ 以及源量 $\boldsymbol{J}(t)$，$\rho(t)$ 的复数表示式代入微分、瞬时形式非限定性的麦克斯韦方程组(2.51)即可得到复数形式的麦氏方程组。如代入式(2.51a)，得

$$\nabla \times \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}} e^{j\omega t}] = -\mathrm{Re}[j\omega \dot{\boldsymbol{B}} e^{j\omega t}]$$

式中，∇是对空间坐标的微分算子，它同取实部符号“Re”可调换次序，从而得

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega \dot{\boldsymbol{B}} \tag{2.96a}$$

类似地，可得其他三个方程，即

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{J}} + j\omega \dot{\boldsymbol{D}} \tag{2.96b}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{2.96c}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\rho} \tag{2.96d}$$

这就是复数形式的麦克斯韦方程组，其中 $\dot{\boldsymbol{E}}$，$\dot{\boldsymbol{D}}$，$\dot{\boldsymbol{H}}$，$\dot{\boldsymbol{B}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{J}}$ 均为复矢量，而 $\dot{\rho}$ 是复数。

根据电流连续性方程(2.10)，容易导出其复数形式为

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{J}} = -j\omega\dot{\rho} \tag{2.97}$$

由于简单媒质中，电磁场复矢量间满足的本构关系为

$$\dot{\boldsymbol{D}} = \varepsilon \dot{\boldsymbol{E}} \tag{2.98a}$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \mu \dot{\boldsymbol{H}} \tag{2.98b}$$

因此，由式(2.96)容易写出微分、复数形式限定性的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\mu \dot{\boldsymbol{H}} \tag{2.99a}$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{J}} + j\omega\varepsilon \dot{\boldsymbol{E}} \tag{2.99b}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{2.99c}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \tag{2.99d}$$

应指出，为书写方便，以后将复矢量及复数符号上的小圆点“·”均略去，可根据表达式中有无 j 或 ω 来判断关系式是否是复数形式。

2.5.2 复数形式的边界条件

在两种媒质的交界面上，用复数形式表示的边界条件为

$$\boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{2.100a}$$

$$\boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S \tag{2.100b}$$

$$\boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{2.100c}$$

$$\boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{2.100d}$$

2.5.3 E 和 H 的矢量亥姆霍兹方程

根据式(2.98)中的两个旋度方程，可导出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的非齐次矢量亥姆霍兹方程为

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - k^2 \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} - k^2 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J}$$

式中，$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega/v$，称为电磁波的波数。在直角坐标系下，$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$，而 k_x，k_y，k_z 分别为沿 x，y，z 方向的分波数。利用矢量恒等式，上面两个方程可进一步写为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = j\omega\mu \boldsymbol{J} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} \tag{2.101a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = -\nabla \times \boldsymbol{J} \tag{2.101b}$$

类似地，还可写出复数形式的矢量磁位、标量电位等场量满足的亥姆霍兹方程。

2.5.4 复坡印亭矢量和复坡印亭定理

对时谐电磁场，瞬时场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都随时间作周期性变化，此时一个周期内的平均功率流密度 $\boldsymbol{S}_{av}$ 较为常用。下面借助式(2.71)导出 $\boldsymbol{S}_{av}$ 与复数形式的坡印亭矢量(简称复坡印亭矢量) $\boldsymbol{S}$ 间的关系。

由于 $\boldsymbol{E}(t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}e^{j\omega t} + \boldsymbol{E}^* e^{-j\omega t}]$，$\boldsymbol{H}(t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{H}e^{j\omega t} + \boldsymbol{H}^* e^{-j\omega t}]$。于是，将它们代入式(2.71)，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{av} &= \frac{1}{T}\int_0^t [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4T}\left[\int_0^T (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})e^{j2\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_0^T (\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}^*)e^{-j2\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_0^T (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H})\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}[(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)+(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)^*]\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right] = \mathrm{Re}[\boldsymbol{S}] \tag{2.102}$$

式中，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*/2$，为复坡印亭矢量，代表复功率流密度，而式中的"1/2"是因为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 对应于场矢量的幅值而不是有效值。由式(2.102)可见，$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{S}_{av}$ 有联系，而与 $\boldsymbol{S}$ 没有直接关系。换言之，不能由 $\boldsymbol{S}$ 的表达式取实部得到 $\boldsymbol{S}(t)$ 的表达式，之所以定义复坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$，在于能方便地求得 $\boldsymbol{S}_{av}$。

正像不能用复功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 来计算瞬时功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}(t)$ 一样，复数场量也不能直接用来计算瞬时的电磁场能量密度，只能通过引入复数形式的电磁场能量密度来求得平均电磁场能量密度(即电磁场能量密度的时间平均值)。

平均电场能量密度可表示为

$$(w_e)_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T w_e(t)\,\mathrm{d}t$$

式中，$w_e(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}[\boldsymbol{D}\mathrm{e}^{j\omega t}+\boldsymbol{D}^*\mathrm{e}^{-j\omega t}]\cdot[\boldsymbol{E}\mathrm{e}^{j\omega t}+\boldsymbol{E}^*\mathrm{e}^{-j\omega t}]\right\}$，于是上式可变为

$$(w_e)_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[w_e] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*\right] \xlongequal{\text{对简单媒质}} \frac{1}{4}\varepsilon E^2 \tag{2.103}$$

而 $w_e = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*/2$，称为复电场能量密度。

同理，平均磁场能量密度为

$$(w_m)_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[w_m] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*\right] \xlongequal{\text{对简单媒质}} \frac{1}{4}\mu H^2 \tag{2.104}$$

式中，$w_m = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*/2$，为复磁场能量密度。

为导出简单媒质的坡印亭定理，对复坡印亭矢量取散度，得

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^*\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}^*)$$

将式(2.98a)和式(2.98b)代入上式，得

$$-\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right) = j2\omega\left(\frac{1}{4}\mu H^2 - \frac{1}{4}\varepsilon E^2\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*$$

对上式两端进行体积分，并对左端应用散度定理，可得

$$-\oint_S\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = j2\omega\int_V[(w_m)_{av}-(w_e)_{av}]\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_V\sigma E^2\mathrm{d}V \tag{2.105}$$

这就是复数形式的坡印亭定理，简称为复坡印亭定理。若右端的第二项是实数，则上式表明，从封闭面 S 输入的有功功率等于体积内的平均热损耗功率；从封闭面 S 输入的无功功率等于体积内电磁场储能的最大时间变化率。

例 2.2 已知真空中一电磁波的电场强度 $E_x = E_0\cos(\omega t - kz)$，①求此电磁波的磁场强度的复数及瞬时表达式；②求任一 z 处的瞬时能流密度矢量、复坡印亭矢量及平均能流密度矢量。

解：① 由瞬时形式的麦克斯韦第一旋度方程，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

将此方程在直角坐标系下展开，得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{a}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{a}_x H_x + \boldsymbol{a}_y H_y + \boldsymbol{a}_z H_z)$$

对上式积分并注意到积分常数不是 t 的函数，得磁场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{a}_y H_y = \boldsymbol{a}_y \frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t - kz) = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{120\pi}\cos(\omega t - kz)$$

式中，$\omega\mu_0/k = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi\ \Omega$，其复数表达式为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_y \frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-jkz} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{120\pi}e^{-jkz}$$

② 任一 z 处的瞬时能流密度矢量为

$$\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t - kz)$$

复坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{a}_x E_0 e^{-jkz} \times \boldsymbol{a}_y E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{jkz}\right] = \boldsymbol{a}_z \frac{E_0^2}{240\pi}$$

以及平均能流密度矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}(t)\,dt = \mathrm{Re}[\boldsymbol{S}] = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_z \frac{E_0^2}{240\pi}$$

习　题

2-1 已知媒质中的体电流密度 $\boldsymbol{J} = 2e^{-5x}\boldsymbol{a}_x + 3\sin(6y)\boldsymbol{a}_y + z^2\boldsymbol{a}_z\ \mathrm{A/m^2}$，求体电荷密度 ρ 随时间的变化速率 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$。

2-2　圆柱坐标系中，一半径为 3 mm 的圆形导线中的体电流密度 $\boldsymbol{J}=5(1-e^{-500r})\boldsymbol{a}_z$ A/m²。求导线中的总电流。

2-3　圆球坐标系中，体电流密度 $\boldsymbol{J}=10\sin\theta\boldsymbol{a}_R$ A/m²，求穿过半径 $R=0.2$ m 处的球表面上的总电流。

2-4　面电荷密度 $\rho_S=1$ nC/m² 的电荷均匀分布于平面 $-x+3y-6z=6$ m 上。求包含坐标原点一侧空间中的电场强度。

2-5　一点电荷 $Q=50$ nC，位于直角坐标系的原点，求点(2，4，−5)处的电通量密度。

2-6　两种无耗电介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=2.5$ 和 $\varepsilon_{r2}=5$，其分界面为 $z=0$ 的平面。若已知介质 1 中的电场强度 $\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{a}_x+4\boldsymbol{a}_y+6\boldsymbol{a}_z$。

求：① 介质 2 一侧的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}_2$；

② $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 是介质 2 中任意点处的场量表达式吗？为什么？

2-7　证明通过任意封闭曲面的传导电流和位移电流之和等于零。

2-8　一长度 $l=1$ m，内外导体半径分别为 $a=1$ mm，$b=3.5$ mm 的同轴电容器中填充相对介电常数 $\varepsilon_r=7$ 的介质，内外导体间的外加电压 $u=200\sin(377t)$ V。求位移电流 i_d，并同传导电流 i_c 进行比较。

2-9　一平板电容器的极板面积 $S=15$ cm²，电容器内填充媒质的介电参数为 $\varepsilon=2.56\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，$\sigma=3.5\times10^{-5}$ S/m，两极板间施加直流电压 $U_0=50$ V。求此电容器内的电场强度、体电流密度、电流、功率流密度以及损耗功率。

2-10　证明：时变场中，当两种媒质分界面上无初始自由面电荷和面电流密度存在时，分界面上只有两个切向场分量的边界条件是独立的(即两个法向场分量的边界条件包含在切向分量的边界条件之中)。

2-11　试由微分形式的麦克斯韦方程组，导出电荷守恒定律：$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$。

2-12　试根据平板电容器充放电时电容器中坡印亭矢量的方向，判断电磁场能量的方向，并解释其物理意义。

2-13　已知一区域中某瞬间的体电流密度 $\boldsymbol{J}=\dfrac{1}{3}(x^3\boldsymbol{a}_x+y^3\boldsymbol{a}_y+z^3\boldsymbol{a}_z)$。

① 求点 $p(1,1,1)$ 处体电荷密度的时间变化率 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$；

② 求此时以原点为球心，以 a 为半径的球内总电荷的时间变化率 $\dfrac{\partial Q}{\partial t}$；

③ 在②的球面上验证电流连续性方程。

2-14　根据对偶性原理，写出空气和理想磁介质间分界面上的边界条件。

2-15　若复矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0e^{-jk\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{A}_0e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，证明：$\nabla\times\boldsymbol{A}=j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}$。

2-16　自由空间中，一正弦电磁波的电场强度的复矢量为

$$\boldsymbol{E}=(-j\boldsymbol{a}_x-2\boldsymbol{a}_y+j\sqrt{3}\boldsymbol{a}_z)e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)}$$

求：① 电场强度的瞬时矢量 $\boldsymbol{E}$；

② 磁场强度的瞬时矢量 $\boldsymbol{H}$；

③ 平均能流密度矢量 $\boldsymbol{S}_{av}$；

④ 平均电磁场能量密度 w_{av}。

2-17 位于 $z=0$ 和 $z=b$ 处的两导体平行板之间填充空气，其间存在一时谐电磁场，电场强度的瞬时矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_y E_0 \sin\dfrac{\pi z}{b}\cos(\omega t-kx)$ V/m。

求：① 磁场强度的瞬时矢量 $\boldsymbol{H}$；

② 平均能流密度 $\boldsymbol{S}_{av}$；

③ 两导体表面上面电流密度的瞬时矢量 $\boldsymbol{J}_S$。

2-18 在库仑规范下，导出矢量磁位 $\boldsymbol{A}(t)$ 和标量电位 $\phi(t)$ 所满足的波动方程。

2-19 分别从微分、复数形式限定性的麦克斯韦方程组出发，导出电场强度、磁场强度的复矢量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 所满足的亥姆霍兹方程。

2-20 已知一电磁波的电场强度瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}=0.01\cos(10^8\pi t-kz)\boldsymbol{a}_x-0.03\cos\left(10^8\pi t-kz+\frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{a}_y \text{ V/m}$$

求：① 电场强度的复数表达式；

② 磁场强度的复数及瞬时表达式。

2-21 设理想导体构成的空心矩形波导 $(0<x<a,\ 0<y<b,\ -\infty<z<\infty)$ 中传播的导行波的瞬时电磁场分量分别为

$$E_y=E_{y0}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z),\ H_x=E_{x0}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)$$

$$H_z=H_{z0}\cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z),\ E_x=E_z=H_y=0 \quad \text{其中 } \beta \text{ 为常数。}$$

① 写出电磁场分量的复数表达式；

② 求波导中的位移电流分布；

③ 求波导内壁表面上的面电荷、面电流的表达式。

2-22 已知理想电介质中一时变电磁场的电场强度和磁场强度的瞬时矢量分别为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_z 100\pi\cos(\omega t-1.5y)\text{ V/m},\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_x 10\pi\cos(\omega t-1.5y)\text{ A/m}$$

求：① 此时变电磁场的角频率 ω；

② 理想电介质的相对介电常数。

2-23 证明有源区域中电场强度和磁场强度瞬时矢量满足的非齐次矢量波动方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t},\ \nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\boldsymbol{J}\text{。}$$

2-24 在球坐标系中，已知电磁场的瞬时矢量分别为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_\theta\frac{E_0}{R}\sin\theta\cos(\omega t-kR)\text{ V/m},\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{E_0}{\eta_0 R}\sin\theta\cos(\omega t-kR)\text{ A/m}$$

式中，E_0 为常数，$\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$，$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，求通过以坐标原点为球心，$R$ 为半径的

球面的平均功率。

2-25　一长为 l，内外导体半径分别为 a 和 b 的同轴线的始端接一直流电压 U_0，终端接一负载电阻 R_l。已知电流 I 在内外导体截面上均匀分布，且沿 $+z$ 方向流动。

① 试求该段同轴线中的坡印亭矢量；

② 证明坡印亭定理，并说明所得结果的物理意义。

第 3 章 静态场

我们通过第 2 章的学习知道，时变场中电场和磁场是不可分割的，时变电场和时变磁场相互激发。然而，对不随时间变化的电磁场(即静态场)而言，电场和磁场彼此独立，两者间没有任何联系。在电量不随时间变化且相对于观察者静止的电荷周围将建立静电场；在相对于观察者静止的永久磁铁或载恒定电流的导线回路周围将建立静磁场。尽管这两种场均属于静态场，但它们由不同的场源产生，场的性质不同，因此有必要对它们分别进行讨论。

本章先介绍静电场的基本方程、电位和电位方程、边值问题的解法以及电场能量和静电力；然后讨论恒定电场；最后叙述静磁场的基本方程、矢量磁位及其方程、电感以及磁场能量和磁场力。

3.1 静电场

3.1.1 静电场的基本方程

根据第 2 章中的麦克斯韦方程组(2.51a)，(2.51d)以及(2.54a)，(2.54d)，令 $\frac{\partial}{\partial t}=0$，即得以下的微分形式和积分形式的静电场基本方程。

微分形式：$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ (3.1a) 积分形式：$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$ (3.1c)

$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ (3.1b) $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho dV$ (3.1d)

可见：①静电场是无旋场，即静电场满足能量守恒定律，静电场的电力线(通量线)不是闭合曲线；②静电场是有散场，其场源就是静止的电荷。

3.1.2 电位和电位方程

1) 电位

由于静电场是无旋场，因此它是一种位场。这样，除了用电场强度来描述静电场外，还

可用一个标量场——电位来描述静电场的特性，以简化计算。

根据式(2.22)，外力将单位正电荷从静电场中的 a 点移到 b 点所做的功为 $-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$，它只取决于 a 点和 b 点的坐标。若选择 a 点作为电位参考点(通常选择无穷远处作为电位参考点)，则此外力做功可被用来描述静电场。这样，可将静电场中某点的电位定义为单位正电荷从无穷远处移到静电场中某点 b 时，外力克服电场力所做的功。记 b 点的电位为 V_b，则

$$V_b = -\int_\infty^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{3.2}$$

于是，单位正电荷从静电场中 a 点移到 b 点外力所做的功就称为 b 点与 a 点间的电位差(电压)。电压记为 U_{ba}，即

$$\begin{aligned} U_{ba} &= -\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\left[\int_a^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_\infty^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\right] \\ &= -\left[\int_\infty^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_\infty^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\right] = V_b - V_a \end{aligned} \tag{3.3}$$

这表明两点间的电压等于两点间的电位之差。

应指出，电位参考点的选取是任意的，但选取恰当的电位参考点，可使问题的分析、求解得到简化。电位参考点选取的一般原则是：①电位的表达式要有意义，如在点电荷产生的电场中不能选取点电荷所在处为电位参考点，以及在均匀电场中不能选取无穷远处作为电位参考点(否则空间中多数位置处的电位为无穷大而失去实际意义)等；②同一问题只能选取一个电位参考点。一般地，若电荷分布在有限区域内，则可选取无穷远处为电位参考点；若电荷不是分布在有限区域内，则应根据实际情况将参考点选在有限区域内。

根据静电场的无旋性可知，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可用电位的负梯度来表示，即

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{3.4}$$

由式(3.4)可知，若已知静电场中的电位分布，则可利用此式计算场中各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$，如直角坐标系下，$\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)$。同样，若已知场中的电场强度的分布，也可在选定电位参考点后，利用 $V_b = -\int_p^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ 计算电位，其中 p 为电位参考点(坐标)。

类似于点电荷、点电荷系以及分布电荷在其周围空间产生电场强度的表达式(2.15)—(2.17)，若真空中 $\boldsymbol{r}'$ 处有一点电荷 Q，则由式(3.2)容易导出距离点电荷为 R 处的电位为

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{3.5}$$

式中，$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$。当自由空间中有 n 个点电荷时，则场点 p 处的电位等于各个点电荷产生电位的代数和，即

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i} \tag{3.6}$$

式中，$R_i = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_i'|$，表示 Q_i 所在点与场点 p 间的距离。自由空间中有限区域内体、面以及

线电荷分布产生的电位分别为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\mathrm{d}V}{R},\ V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\rho\mathrm{d}S}{R},\ V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\rho\mathrm{d}l}{R} \tag{3.7}$$

以上三式均选取无穷远处作为电位参考点。

2) 电位方程

静电场中的电位也可用电位方程求得，这对均匀媒质或局部均匀媒质填充的区域尤为适用。均匀媒质中的电位方程可将式(3.4)代入式(2.21)得到，即

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.8}$$

上式称为电位的泊松(Poisson)方程。特别地，若均匀媒质中无自由电荷存在，即 $\rho=0$，则得

$$\nabla^2 V=0 \tag{3.9}$$

此式称为电位的拉普拉斯(Laplace)方程。

这样，对具体的边值问题，利用方程(3.8)和(3.9)在相应坐标系下的展开式及边界条件即可解出电位 V。对二维和三维边值问题的求解一般需借助分离变量法等方法进行，详见3.1.6节内容。

例 3.1 如图 3.1 所示，真空中间距为 l 的两根无限长平行双导线构成的平行双线的横截面，假设平行双线上电荷均匀分布，线电荷密度分别为 $\pm\rho_l$。求空间任一点 p 处的电位。

解：选取直角坐标系的 z 轴与平行双线的轴线平行，平行双线在 xOy 平面的连线沿 x 轴，坐标原点位于连线中心。因平行双线无限长，故任一 $z=\text{const.}$ 的平面上点 p 处的电位相同，这样只需在 xOy 平面上求解点 $p(x,y)$ 处的电位。再选取平行双线在 xOy 平面的连线上的某点 p_0 为电位参考点，如图所示。其中 r_{0+}，r_{0-} 分别为 $+\rho_l$，$-\rho_l$ 所在点与 p_0 点间的距离，r_+，r_- 分别为从 p 点到 $+\rho_l$，$-\rho_l$ 所在点间的距离。

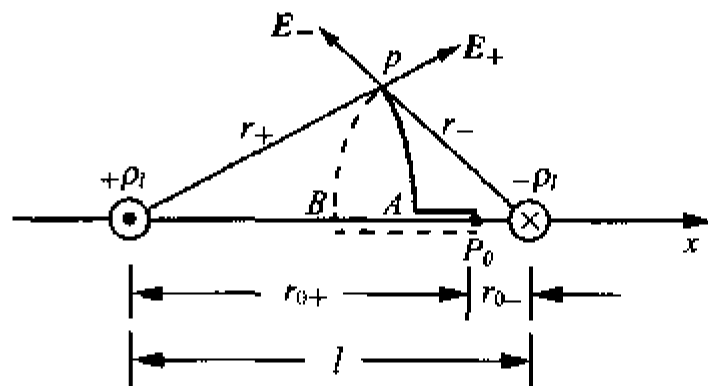


图 3.1 两平行双导线的电位

为求得电荷密度为 ρ_l 的线电荷在点 p 处产生的电位，选取点 p_0 和 p 之间的积分路径为 $\overline{pAp_0}$，其中 $\widehat{pA}$ 段是以 $+\rho_l$ 所在点为中心，以 r_+ 为半径的圆弧，在此圆弧上因 $\boldsymbol{E}_+$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 垂直，故 $\boldsymbol{E}_-$ 的线积分等于零。于是得

$$V_+=\int_p^{p_0}\boldsymbol{E}_+\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_A^{p_0}\boldsymbol{E}_+\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r+}^{r_{0+}}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_{0+}}{r_+}\right) \tag{3.10}$$

类似地，电荷密度为 $-\rho_l$ 的线电荷在 p 点产生的电位为

$$V_-=\int_B^{p_0}\boldsymbol{E}_-\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{r_-}^{r_{0-}}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_{0-}}{r_-}\right) \tag{3.11}$$

这样，p 点的总电位为

$$V_p=V_++V_-=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_{0+}}{r_{0-}}\right)=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)+C \tag{3.12}$$

式中，C 是与电位参考点的选择有关的常数。若电位参考点选在平行双线连线的中点(坐标原点)，$r_{0+}=r_{0-}=l/2$，$C=0$，则 p 点电位为

$$V_p=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x-l/2)^2+y^2}{(x+l/2)^2+y^2}\right] \tag{3.13}$$

例 3.2 有两块无限大的导体平板分别置于 $x=0$，a 处，已知 $x=0$ 处，$V=0$；$x=a$ 处，$V=V_0$，在两导体平板间有体电荷密度 $\rho=\rho_0 x/a$ 的电荷分布。求两导体平板间的电位和电场分布。

解：两导体平板间的电位 V 应满足泊松方程

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.14}$$

由于电位 V 与 y，z 无关，因此方程(3.14)变为

$$\nabla^2 V=\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 a} \tag{3.15}$$

对上式积分两次，得

$$V=-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}x^3+C_1 x+C_2 \tag{3.16}$$

其中 C_1，C_2 由边界条件确定。

将式(3.16)分别代入边界条件：$V|_{x=0}=0$，$V|_{x=a}=V_0$，可得 $C_1=\dfrac{V_0}{a}+\dfrac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}$，$C_2=0$。于是

$$V=-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}x^3+\left(\frac{V_0}{a}+\frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}\right)x \tag{3.17}$$

而电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{a}_x=\left[\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2-\left(\frac{V_0}{a}+\frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}\right)\right]\boldsymbol{a}_x$$

3.1.3 电介质中的电场

1) 电偶极子的电位和电场强度

所谓电偶极子，是指真空中由一对相距小距离的等值异号电荷构成的场源系统，如图 3.2 所示。其中每个点电荷的电量均为 Q，它们间的距离为 d。电偶极子的场的分析在研究电介质中的场及电磁波的辐射方面都十分有用。

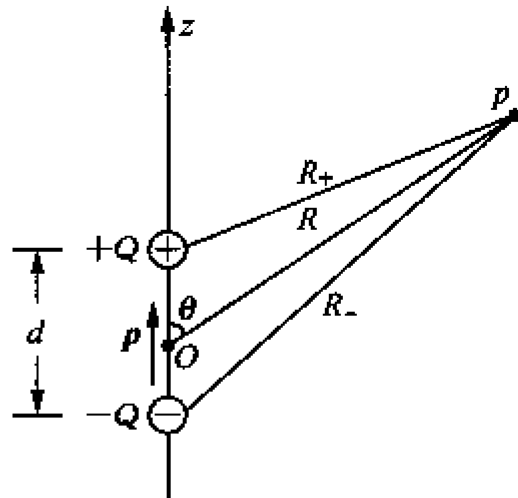


图 3.2 电偶极子

为求出电偶极子的电位和电场强度，选取圆球坐标系，将电偶极子的中心置于坐标原点，并让其轴线与极轴(z 轴)重合，则 p 点电位为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+}-\frac{1}{R_-}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_--R_+}{R_+R_-} \tag{3.18}$$

为便于分析，假设两电荷间的间距 d 相对于坐标原点到场点 p 的距离 R 小得多，即 $R\gg d$。由图 3.2，根据余弦定理，并将 R_+，R_- 用二项式级数展开，并略去高阶小项，有

$$R_+=\left[R^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2-2R\left(\frac{d}{2}\right)\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}\approx R-\left(\frac{d}{2}\right)\cos\theta$$

$$R_-=\left[R^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2+2R\left(\frac{d}{2}\right)\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}\approx R+\left(\frac{d}{2}\right)\cos\theta$$

$$R_+R_-\approx R^2-\left(\frac{d}{2}\cos\theta\right)^2\approx R^2$$

所以

$$V\approx\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2} \tag{3.19}$$

定义一矢量 $\boldsymbol{p}$ 的大小为 $p=Qd$，其方向由负电荷指向正电荷，即

$$\boldsymbol{p}=Q\boldsymbol{d}=Qd\boldsymbol{a}_z$$

称为电偶极子的电矩，简称为电偶极矩。于是，式(3.19)可写为

$$V=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{3.20}$$

电偶极子的电场强度可由式(3.4)在圆球坐标系下展开得到，即

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\left(\boldsymbol{a}_R\frac{\partial V}{\partial R}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)=\boldsymbol{a}_R\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^3}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0R^3} \tag{3.21}$$

可见，电偶极子的电力线都分布在圆球的子午面上(包含电偶极子轴线的平面上)，且电力线垂直于电偶极子的平分面 ($\theta=\pi/2$ 的平面)。图 3.3 示出了电偶极子在任一平面上的电力线和等位线的分布图，其立体图形可由该图以极轴为轴旋转得到。

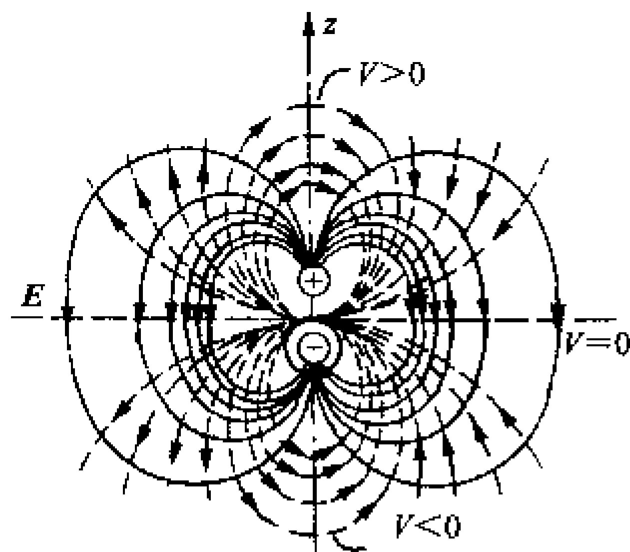


图 3.3 电偶极子的电力线分布图

2) 电介质中的电场

所谓电介质，是指导磁率为 μ_0 的媒质(常将电介质简称为介质)。通常所说的理想(电)介质(或称绝缘体)，是指晶格结构中没有自由电子的物质，即其中的所有电子都受到很强的束缚力，从而阻碍电子的随机运动。当然，实际上并不存在绝对的理想介质，当加在介质上的外加电场低于一定值时，若介质中的电流可忽略不计，此时则可认为这种介质为理想电介质。

介质可分为无极性介质和有极性介质。对无极性介质(如氢气(H_2))，在没有外电场作用时，每个分子的正电荷作用中心和负电荷作用中心是重合的，对外不呈现带电现象。但在外电场作用下，分子内部正负电荷受到相反方向的力面使正负电荷的作用中心不再重合，从

而形成电偶极子，此时称无极性介质被极化。对于有极性介质（如水（H_2O）），每一个分子的束缚正负电荷作用中心不重合，所以每个分子都具有电偶极子的性质，但在没有外电场作用时，由于分子热运动的影响，介质中每个分子的电偶极矩随机排列而合成电偶极矩为零，对外宏观电效应相互抵消而不呈现带电现象；而在外电场作用下，束缚电荷形成的电偶极子从排列紊乱而转向外电场方向，此时称有极性介质被极化。因此，不论是无极性介质还是有极性介质，在外电场作用下，每一个分子的束缚电荷都形成电偶极子，从而介质处于被极化状态，介质内含有大量的电偶极子，对外呈现带电现象。这样，介质中的场强变为场源电荷（自由电荷）与介质中束缚电荷产生的场强的叠加，从而改变原来的场分布，其总的效应是使介质中的场强被削弱。

类似于自由空间中自由体电荷分布产生的电位，极化介质外任一点的电位应为介质内所有束缚电荷在该点产生的宏观电位。为了计算这个宏观电位，引入一个新的物理量——极化强度 $\boldsymbol{P}$，它表示单位体积内电偶极矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum \boldsymbol{p} \tag{3.22}$$

这样，将式(3.20)中的 $\boldsymbol{p}$ 用 $\boldsymbol{P}\mathrm{d}V'$ 代之，即得极化介质内体积元 $\mathrm{d}V'$ 内的电偶极矩在介质外任一点 p 处产生的电位微元为

$$\mathrm{d}V = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{R}\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

式中，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \boldsymbol{a}_R = R\boldsymbol{a}_R$。因此，整个介质中电偶极矩在点 p 处产生的电位为

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \boldsymbol{P} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V' \tag{3.23}$$

利用矢量恒等式 $\boldsymbol{P} \cdot \nabla'(1/R) = \nabla' \cdot (\boldsymbol{P}/R) - (\nabla' \cdot \boldsymbol{P})/R$ 以及散度定理，可将上式变为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\boldsymbol{P}}{R}\right)\mathrm{d}V' - \int_{V'} \frac{(\nabla' \cdot \boldsymbol{P})}{R}\mathrm{d}V'\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'} \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_n}{R}\mathrm{d}S' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\left(-\frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{P}}{R}\right)\mathrm{d}V' \end{aligned} \tag{3.24}$$

式中，V' 为极化介质的体积，$\boldsymbol{a}_n$ 为包围体积 V' 的封闭面 S' 上的面积微元矢量 $\mathbf{d}\boldsymbol{S}'$ 的外法向单位矢量。可见，极化介质在 p 点产生的电位是闭曲面积分项和体积分项的代数和。将式(3.24)同式(3.7)相比较可知，体积分中的 $-\nabla' \cdot \boldsymbol{P}$ 相当于一种体电荷密度；面积分中的 $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_n$ 相当子一种面电荷密度。为此，前者称为束缚体电荷密度，记为 ρ_p；后者称为束缚面电荷密度，记为 ρ_{pS}，即

$$\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{3.25}$$

$$\rho_{pS} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_n \tag{3.26}$$

式(3.25)中 ∇ 上略去一撇，这是因为对极化强度 $\boldsymbol{P}$ 求散度是对束缚体电荷密度为 ρ_p 所在点进行的，略去一撇并不会引起误解。

综上所述，电介质的极化导致束缚电荷分布，这种电荷分布是由于束缚电荷的作用中心的分离引起的，这同自由电荷的分布是不同的。

基于自由空间的高斯定理，可导出电介质的高斯定理。对电介质，极化介质中的电场强度应由自由电荷和束缚电荷共同产生。这样，若介质中除了有束缚电荷密度外还有自由电荷密度，则介质的高斯定理的微分形式应由式(2.21)改写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho+\rho_{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0}$$

将式(3.25)代入上式，可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho-\nabla\cdot\boldsymbol{P})$$

或

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\rho \tag{3.27}$$

于是，可对任一媒质中的电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 给出以下定义：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{3.28}$$

因此，式(3.27)可表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{3.29}$$

这表明，介质中任一点的电通量密度的散度等于该点处的自由体电荷密度。即 $\boldsymbol{D}$ 的源是自由电荷，而 $\boldsymbol{E}$ 的源既包含自由电荷也包含束缚电荷。将式(3.29)两端取体积分，并应用散度定理，可得高斯定理的积分形式，即

$$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q \tag{3.30}$$

假如电介质是线性和各向同性的媒质，实验证明，极化强度与介质中的合成电场强度成正比，即

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E} \tag{3.31}$$

式中，χ_e 称为电介质的极化率，是无量纲的标量，它决定于电介质的性质。这样，式(3.28)可写为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{3.32}$$

式中，ε 称为介质的介电常数，单位是 F/m；ε_r 是介质的相对介电常数，没有量纲。应注意，在线性、各向同性介质中，ε 是空间坐标的标量函数；在简单媒质中，ε 是常数；在各向异性媒质中，介电常数是一个二阶张量(并矢)。

值得指出，当加在介质上的电场强度值增加到致使电子脱离分子时，介质将发生击穿。通常将介质中恰好击穿时的电场强度值称为该物质(介质)的击穿场强，如空气的击穿场强为 3×10^3 kV/m；硬橡胶的击穿场强为 6×10^4 kV/m 等。实际应用中应使物质中的场强远低于其击穿场强。

3.1.4　静电场的边界条件

在求解静电场的边值问题时，经常需要两种不同媒质交界面（如真空、理想介质、理想导体等）上的边界条件。第 2 章中导出的 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的边界条件完全适用于静电场，下面分别引出场矢量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 及电位 V 满足的边界条件。

1）场矢量 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的边界条件

对电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 而言，有

$$\boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \quad 或 \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \tag{3.33}$$

式中，$\boldsymbol{a}_n$ 表示由媒质 2 指向媒质 1 的法向单位矢量，ρ_S 是交界面上的自由面电荷密度。

特别地，若第 1 种媒质是（理想）介质，第 2 种媒质是（理想）导体，则式(3.33)变为

$$\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{D}_1 = \rho_S \quad 或 \quad D_{1n} = \rho_S \tag{3.34}$$

这表明，导体表面处介质中任一点的电通量密度的法向分量等于该点导体表面上的面电荷密度。

若交界面的两侧均为介质，且未在交界面上放置任何自由面电荷，则有

$$D_{1n} = D_{2n} \quad 或 \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \tag{3.35}$$

可见，穿过介质交界面的电通量密度的法向分量是连续的，但当 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ 时，电场强度的法向分量并不连续，这是由交界面上存在束缚面电荷密度引起的。可证明，在两种各向同性介质的交界面上，有

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\rho_{pS}}{\varepsilon_0} \tag{3.36}$$

对电场强度 $\boldsymbol{E}$ 而言，有

$$\boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \quad 或 \quad E_{1t} = E_{2t} \tag{3.37}$$

这表明，在两种介质的交界面上电场强度的切向分量连续。若媒质 1 是（理想）介质，媒质 2 是（理想）导体，由式(3.34)和式(3.35)可知，导体表面处介质 1 中的静电场总是垂直于导体表面。

2）电位 V 的边界条件

根据静电场的基本方程：$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，类似于第 2 章 2.1 节中电场切向分量在媒质交界面处连续这一边界条件的推导思路，可证明两种媒质交界面处电位连续，即

$$V_1 = V_2 \tag{3.38}$$

因为 $D_{in} = \varepsilon_i E_{in} = -\varepsilon_i \dfrac{\partial V_i}{\partial n}$，$i = 1,2$，而 n 表示沿交界面法线方向上的坐标量，所以式(3.33)可改写为

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \rho_S \tag{3.39}$$

这表明,若交界面上存在自由面电荷,则电位导数不连续。

3.1.5 静电场导体系统中的电容

1) 导体的特点

众所周知,导体是指内部有大量自由电荷的媒质。导体内部有电场时,自由电荷会受到电场的作用力而发生宏观运动。若导体内没有电荷的宏观运动,则导体内一定没有电场,此时导体处于静电平衡状态。换言之,当导体处于静电平衡状态时,导体内部不存在电荷,电荷只能分布于导体表面。这样,若将一个不带电导体放在外电场中,外电场将使自由电荷在导体表面上形成某种分布,表面电荷在导体内部所产生的电场与外电场相互抵消,从面使导体内部任意点的电场强度都等于零。

外电场使导体内部电荷重新分配的现象称为静电感应现象,静电感应使不带电导体的某部分表面有过剩的正电荷,而其余部分表面有等值的过剩负电荷,这些过剩的电荷称为感应电荷。

静电平衡状态下,导体内部各点电位都相同,导体是等位体,导体表面是等位面。真空中带电导体的电位高低,决定于它所带电荷的多少和它的形状,同时还与附近其他导体上的分布电荷有关。

2) 电容器和电容

若一导体与其他导体和电荷相距很远,以致于此导体表面的电荷分布不受它们的影响,则此导体的电位仅决定于本身的形状以及与所带的电荷成正比,这种导体称为孤立导体。孤立导体的电位与电荷间的关系为

$$V=\frac{Q}{C} \quad 或 \quad Q=CV$$

式中,C 称为孤立导体的电容,其单位为 F。

相互接近而又绝缘的两块任意形状的导体构成一个电容器,两导体称为电容器的电极。当电容器的两个电极分别与外电源连接时,电源就给电容器充电。在整个充电过程中,两导体上带有等量的异性电荷,直至充电过程结束。此时两电极之间的电压就等于电源电压,面一个电极带$+Q$ 的电荷时,另一个电极就带$-Q$ 的电荷。电极所带电荷与电极之间的电压之比称为电容器的电容,即

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2}=\frac{Q}{U}$$

可见,只要已知电容器极板上所带的电量与两极板间的电压,即可求得电容器的电容。

例 3.3 如图 3.4 所示的同轴线,内导体半径为 a,外导体半径为 b,内外导体之间填充介质的介电常数为 ε,内外导体间的电压为 U_0,且外导体接地。

求:① 内外导体间的电位分布;

② 内导体表面上的面电荷密度;

③ 单位长度的电容。

解：① 选取圆柱坐标系，由圆对称性可知，同轴线内外导体间的电位只是变量 r 的函数，因此，电位方程(3.9)变为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{3.40}$$

积分两次可得

$$V=A\ln r+B \tag{3.41}$$

式中，A，B 为待定常数。

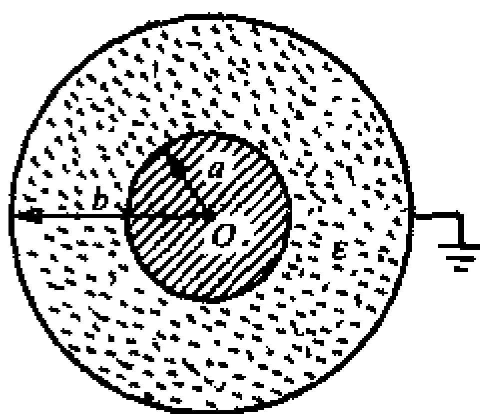


图 3.4 同轴线的横截面

将式(3.41)代入边界条件：$V|_{r=b}=0$ 及 $V|_{r=a}=U_0$，可得 $B=-A\ln b$ 及 $A=\dfrac{U_0}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}$。

于是，式(3.41)变为

$$V=U_0\frac{\ln\left(\dfrac{r}{b}\right)}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)} \tag{3.42}$$

② 由式(3.42)可得同轴线内外导体间的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_r=\frac{U_0}{r\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\boldsymbol{a}_r \tag{3.43}$$

于是，内导体表面上的面电荷密度为

$$\rho_S\,|_{r=a}=\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{D}\,|_{r=a}=D_r\,|_{r=a}=\varepsilon\frac{U_0}{a\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} \tag{3.44}$$

③ 由式(3.44)知，内导体单位长度上的电荷为

$$q_l=2\pi\rho_S=\frac{2\pi\varepsilon U_0}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} \tag{3.45}$$

这样，单位长度的电容为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} \tag{3.46}$$

3.1.6 静电场边值问题的解法

通过前面内容的学习使我们知道，根据引出的电位泊松方程和拉普拉斯方程以及不同媒质交界面上电场强度和电位的边界条件，可求解静电场的定解问题(通常将方程＋边界条件构成的边值问题称为定解问题)。尽管前面给出了电位仅是一维空间坐标函数的例子，但实际应用中遇到的静电场边值问题往往较为复杂(如电位为二维或三维空间坐标的函数)，此时需采用其他求解方法。

根据不同的边界条件,静电场的边值问题可分为三类:(1)第一类边值问题(或狄利克莱(Dirichlet)问题),这类问题是已知全部边界上的电位分布,如导体表面上的电位;(2)第二类边值问题(或纽曼(Neumann)问题),这类问题是已知边界上电位的法向导数,如已知导体表面上的电荷分布;(3)第三类边值问题,又称混合边值问题(或劳平(Robbin)问题),这类问题是已知一部分边界上的电位分布及另一部分边界上电位的法向导数。如已知部分导体表面上的电位和部分导体表面上的面电荷密度。可以证明,对于任何一种边值问题,满足边界条件的电位泊松方程和拉普拉斯方程的解是惟一的(这就是电位函数的惟一性定理)。这样,我们可以选择任何一种求解静电场(包括静磁场)边值问题的解法,只要得到的解满足已知的边界条件以及泊松方程或拉普拉斯方程,则可确定此解必定是惟一解。

边值问题的解法有解析法、近似法、图解法以及数值解法等。常用的解析法有分离变量法、镜像法、复变函数法以及格林函数法等。分离变量法是求解拉普拉斯方程的最基本的方法,主要用于求解二维和三维边值问题;镜像法可以求解不便用其他方法求解的一类特殊的边值问题;复变函数法主要是采用保角变换的方法将较为复杂的边界形状变为简单边界进行求解,它主要是求解二维问题;格林函数法主要用于求解泊松方程构成的定解问题。由于计算机的运算速度越来越快,因此数值解法(如有限差分法、有限元法、矩量法以及时域有限差分法等)已获得广泛应用,这种方法主要用于求解具有复杂边界条件的问题。限于篇幅,下面只介绍解析法中的分离变量法和镜像法。

1) 分离变量法

分离变量法是求解不同坐标系下拉普拉斯方程的一种最常用的方法。这里只介绍采用分离变量法在直角坐标系和圆柱坐标系中求解拉普拉斯方程的情况。

(1) 直角坐标系

在直角坐标系中,电位的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{3.47}$$

设电位函数为

$$V(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z) \tag{3.48}$$

式中,$X(x)$,$Y(y)$,$Z(z)$分别是 x, y, z 的函数。将上式代入式(3.47),即对式(3.47)进行变量分离,并设 X, Y, Z 均不为零,经整理可得

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$

由于上式的每一项都只是一个坐标变量的函数,为使所有 x, y 和 z 都满足此式,三项中的每一项都必须等于一个常数。设这三个常数分别为 $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$,于是,有

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2 X=0 \tag{3.49a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2 Y=0 \tag{3.49b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2 Z=0 \tag{3.49c}$$

式中，$k_x^2+k_y^2+k_z^2=0$，而 k_x，k_y，k_z 分别称为分离常数(又称为本征值)，均为待定常数。这样，通过变量分离后就将三维拉普拉斯方程分离成三个常微分方程，从而使偏微分方程的求解问题转化为常微分方程的求解问题。

方程(3.49)中的三个方程的形式完全相同，其通解的形式也相同，但对每一个方程，若分离常数不同，则其通解的形式不同。例如，对方程(3.34a)，若 $k_x=0$，则 X 的通解为

$$X=A_0+B_0x$$

若 $k_x^2>0$，即 k_x 为实数，设 $k_x=k$，$k>0$，则方程(3.49a)的通解为

$$X=A_1\mathrm{e}^{-jkx}+B_1\mathrm{e}^{jkx} \tag{3.50a}$$

或

$$X=A_2\cos kx+B_2\sin kx \tag{3.50b}$$

式中，指数函数和三角函数分别称为本征值 k 所对应的本征函数，本征函数的形式究竟选(3.50a)还是(3.50b)，可根据所研究的区域是无限区域还是有限区域确定。

若 $k_x^2<0$，即 k_x 为纯虚数，设 $k_x^2=-k^2$，$k>0$，则方程(3.49a)的通解为

$$X=A_3\mathrm{e}^{-kx}+B_3\mathrm{e}^{kx} \tag{3.51a}$$

或

$$X=A_4\cosh kx+B_4\sinh kx \tag{3.51b}$$

同样，对无限区域取式(3.51a)的形式；对有限区域取式(3.51b)的形式。

类似地，可得到方程(3.49b)和(3.49c)的通解。

这样，若电位 V 是 x 和 y 的二维函数，设 $k_x^2\geqslant0$，$k_y^2\leqslant0$，且 $|k_x|=|k_y|=k$，$k>0$，则其通解可写为

$$V=(A_0+B_0x)(C_0+D_0y)+(A_1\cos kx+B_1\sin kx)(C_1\cosh ky+D_1\sinh ky) \tag{3.52}$$

根据解的叠加原理，可将电位的通解写成级数形式，即

$$V=(A_0+B_0x)(C_0+D_0y)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos k_nx+B_n\sin k_nx)(C_n\cosh k_ny+D_n\sinh k_ny) \tag{3.53}$$

式中，$k_n(n=1,2,\cdots)$为不同的本征值，是正实数。

同理，若电位 V 是 x，y，z 的三维函数，仿照式(3.53)可类似写出其级数解，只是此时有两个独立的本征值 $k_m(m=1,2,\cdots)$和 k_n，级数也应变为二重级数。

例 3.4 有一横截面为矩形的长金属盒，金属盒的四条棱线处均有无穷小的缝隙使四个边壁相互绝缘，边壁上的电位分布如图 3.5 所示。求金属盒内的电位分布。

解：因为这是一个长金属盒，可认为电位沿 z 向无变化，所以此边值问题是一个二维的封闭平面场问题。

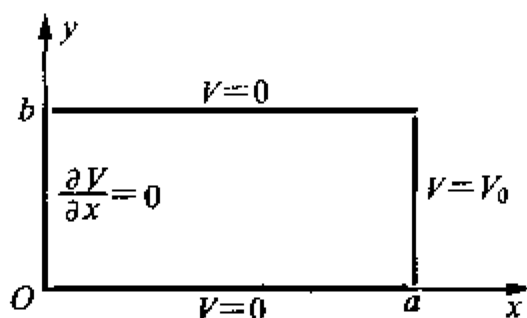


图 3.5 矩形金属盒的横截面

电位 $V(x,y)$ 满足的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\\ \left.\dfrac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=0;V|_{x=a}=V_0\\ V|_{y=0}=0;V|_{y=b}=0\end{cases}\tag{3.54}$$

于是，根据电位 V 在 $y=0$ 及 b 处满足的边界条件可知，k_y 应取正实数，即电位 V 的 y 向本征函数应取正弦或余弦函数。这样，k_x 应为纯虚数。所以，电位 $V(x,y)$ 的通解为

$$V=(A\cosh kx+B\sinh kx)(C\cos ky+D\sin ky)\tag{3.55}$$

式中，取 $|k_x|=|k_y|=k$。

将式(3.55)代入式(3.54)中的边界条件：$\left.\dfrac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，得 $B=0$。类似地，由边界条件：$V|_{y=0}=0$，得 $C=0$；由边界条件：$V|_{y=b}=0$，得 $k=n\pi/b$，$n=1,2,\cdots$。这样，电位 $V(x,y)$ 的级数解为

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\tag{3.56}$$

再由边界条件：$V|_{x=a}=V_0$，得

$$V_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\tag{3.57}$$

将上式两端同乘以 $\sin(\frac{m\pi}{b}y)$，并从 0 到 b 积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^b V_0\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy&=\int_0^b\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\\&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\int_0^b\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\end{aligned}$$

显然，由三角函数的正交性可知，只有当 $m=n$ 时上式右端的积分才不为零。于是，在上式中令 $m=n$，并注意到

$$\int_0^b\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy=\frac{b}{2};\quad \int_0^b V_0\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{2bV_0}{n\pi}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

有

$$A_n=\frac{4V_0}{n\pi\cosh\left(\dfrac{an\pi}{b}\right)},n\text{ 为奇数}\tag{3.58}$$

所以，金属盒内任一点的电位 $V(x,y)$ 为

$$V=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cosh\left[(2k+1)\dfrac{\pi x}{b}\right]\sin\left[(2k+1)\dfrac{\pi y}{b}\right]}{(2k+1)\cosh\left[(2k+1)\dfrac{\pi a}{b}\right]}\tag{3.59}$$

(2) 圆柱坐标系

圆柱坐标系中电位函数 V 满足的三维拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{3.60}$$

设 $V(r,\ \varphi,\ z)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$，代入上式并整理，得

$$\frac{1}{rR}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=0 \tag{3.61}$$

由于上式第一、二项与变量 z 无关，而第三项只含变量 z 而与变量 r 和 φ 无关，因此可令

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=-k_z^2 \tag{3.62}$$

式中，k_z 为分离常数。显然，当 $k_z^2=0$ 时

$$Z=A_0+B_0 z \tag{3.63a}$$

当 $k_z^2=k^2>0$，且 $k>0$ 时

$$Z=A_1\cos kz+B_1\sin kz \tag{3.63b}$$

当 $k_z^2=(jk)^2<0$，且 $k>0$ 时

$$Z=A_2\cosh kz+B_2\sinh kz \tag{3.63c}$$

再对式(3.61)的前两项进行分离，并取 $k_z=jk$，有

$$\frac{r^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+k^2r^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=p^2 \tag{3.64}$$

其中，p 为分离常数，是任意实数。于是，关于变量 φ 的方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+p^2\Phi=0 \tag{3.65}$$

当 $p=0$ 时，其解为

$$\Phi=C_0+D_0\varphi \tag{3.66a}$$

当 $p\neq 0$ 时，其解为

$$\Phi=C_1\cos p\varphi+D_1\sin p\varphi \tag{3.66b}$$

值得指出，在大多数实际问题中，变量 φ 包含 0 和 2π，此时电位 V 必须单值，即 $V(\varphi+2n\pi)=V(\varphi)$，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。因此，$p$ 必须取整数，即 $p=m$，$m=1,\ 2,\ \cdots$。下面仅考虑 $p=m$ 时的情况。这样，式(3.43)中关于变量 r 的方程为

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+(k^2r^2-m^2)R=0 \tag{3.67}$$

这是一个带参数 k 的贝塞尔(Bessel)方程。当 $k=0$ 且 $m=0$ 时，此方程仅为一维方程，其解为

$$R = E_0 + F_0 \ln r \tag{3.68a}$$

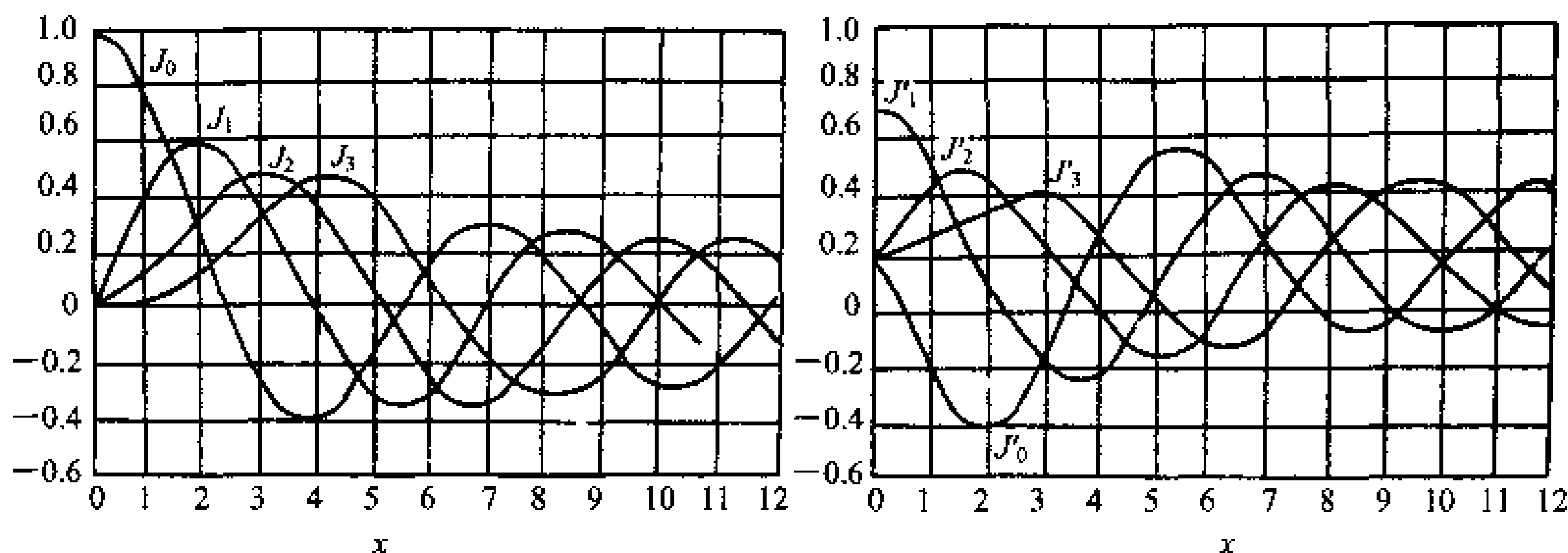
当 $k = 0$ 时，方程(3.67)变为欧拉(Euler)方程，其解为

$$R = E_1 r^m + F_1 r^{-m} \tag{3.68b}$$

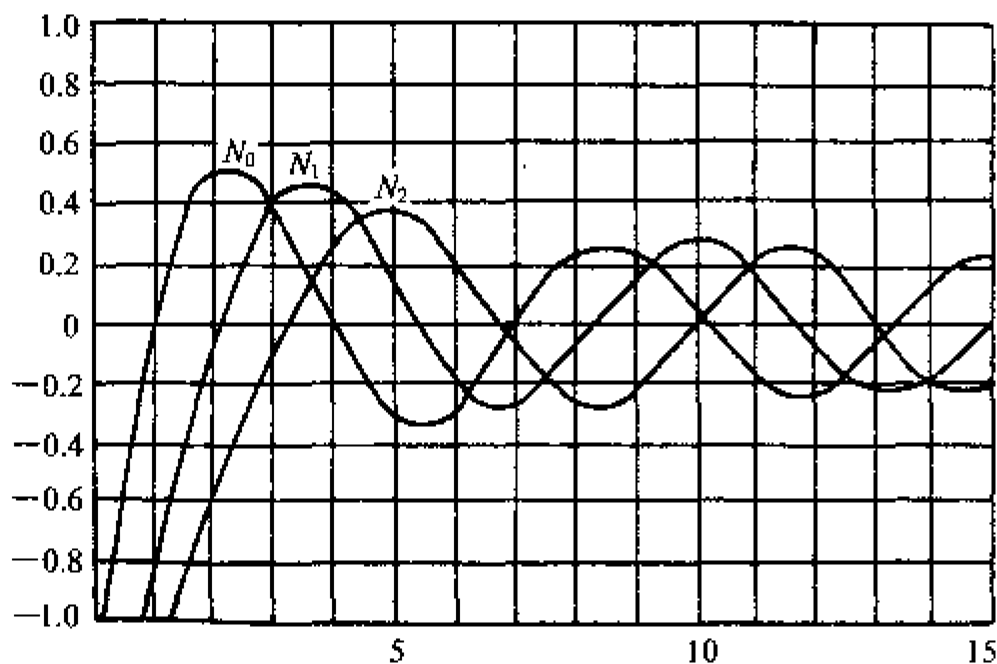
当 $k \neq 0$ 时，方程(3.67)的解为

$$R = E_2 J_m(kr) + F_2 N_m(kr) \tag{3.68c}$$

式中，$J_m(kr)$为第一类 m 阶贝塞尔函数，$N_m(kr)$为第二类 m 阶贝塞尔函数(或称纽曼(Neumann)函数)。图 3.6 分别画出了第一类贝塞尔函数 $J_m(x)$及其导函数 $J_m'(x)$和第二类贝塞尔函数 $N_m(x)$的变化曲线。



(a) 第一类贝塞尔函数及其导函数的变化曲线



(b) 第二类贝塞尔函数的变化曲线

图 3.6 贝塞尔函数的变化曲线

于是，方程(3.60)的一般解(取 $k_z = jk$，$p = m$)为

$$V = [A\cosh kz + B\sinh kz][C\cos m\varphi + D\sin m\varphi][EJ_m(kr) + FN_m(kr)] \tag{3.69}$$

与直角坐标系中电位的级数表达式类似，上式也可写成二重级数的表示形式。

例 3.5 有一半径为 a，高为 h 的中空金属圆罐。如图 3.7 所示。罐底与圆柱面罐壁相

连，电位为零。罐盖与罐壁间留有很小的缝隙使两者相互绝缘，罐盖电位为 V_0。求罐内的电位及电场分布。

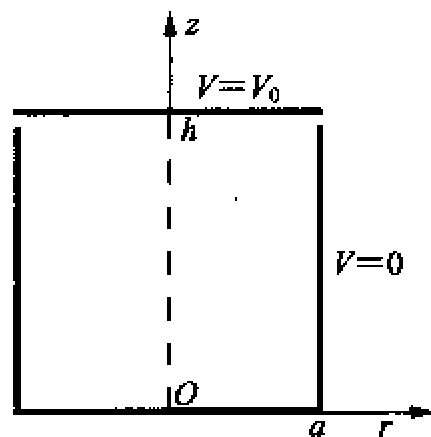


图 3.7 中空的金属圆罐

解：选取圆柱坐标系如图所示。由于圆罐内电位呈轴对称分布，与角变量 φ 无关，因此罐内电位满足的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\\ V|_{z=0}=0; \quad V|_{z=h}=V_0(0\leqslant r\leqslant a)\\ V|_{r\to 0}\neq\infty; \quad V|_{r=a}=0\ (0\leqslant z\leqslant h)\end{cases} \tag{3.70}$$

于是，选取电位 $V(r,z)$ 的一般解为

$$V=(A_0+B_0z)(E_0+F_0\ln r)+(A_1\cosh kz+B_1\sinh kz)[E_1J_0(kr)+F_1N_0(kr)] \tag{3.71}$$

由边界条件：$V|_{r\to 0}\neq\infty$，得 $F_0=F_1=0$；由 $V|_{r=a}=0$，得 $A_0E_0=0, B_0E_0=0, J_0(ka)=0$，即 $k=\nu_{0n}/a$；由 $V|_{z=0}=0$，得 $A_1=0$。所以，由式(3.71)可写出电位 V 的级数表达式为

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}z\right)J_0\left(\frac{\nu_{0n}}{a}r\right) \tag{3.72}$$

再将边界条件：$V|_{z=h}=V_0$ 应用于上式，有

$$V_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}h\right)J_0\left(\frac{\nu_{0n}}{a}r\right)$$

为确定积分常数 A_n，可利用贝塞尔函数的正交性。对上式两端同乘以 $rJ_0(\nu_{0m}r/a)$，并从 0 到 a 积分，得

$$V_0\int_0^a rJ_0\left(\frac{\nu_{0m}}{a}r\right)\mathrm{d}r=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}h\right)\int_0^a rJ_0\left(\frac{\nu_{0n}}{a}r\right)J_0\left(\frac{\nu_{0m}}{a}r\right)\mathrm{d}r$$

上式右端只有当 $m=n$ 时不为零。于是，得

$$A_n=\frac{2V_0}{\nu_{0n}\sinh\left(\dfrac{\nu_{0n}}{a}h\right)J_1(\nu_{0n})} \tag{3.73}$$

将式(3.73)代入式(3.72)，即得罐内任一点的电位 V 的表达式为

$$V=2V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left(\dfrac{\nu_{0n}}{a}z\right)J_0\left(\dfrac{\nu_{0n}}{a}r\right)}{\nu_{0n}\sinh\left(\dfrac{\nu_{0n}}{a}h\right)J_1(\nu_{0n})} \tag{3.74}$$

这样，根据式(3.4)可得罐内的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_r-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_z$$

$$= \boldsymbol{a}_r \left[2V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}z\right) J_1\left(\frac{\nu_{0n}}{a}r\right)}{a \sinh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}h\right) J_1(\nu_{0n})} \right] - \boldsymbol{a}_z \left[2V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}z\right) J_0\left(\frac{\nu_{0n}}{a}r\right)}{a \sinh\left(\frac{\nu_{0n}}{a}h\right) J_1(\nu_{0n})} \right] \quad (3.75)$$

2）镜像法

在实际问题中，通常会遇到电荷置于某一定形状的导体(或介质)交界面附近(如架设于地面上方的平行双导线等)，此时均要考虑地面或导体的影响。对于地面(特别是潮湿地面)一般可视为无限大的理想导电平面。由于电荷处于导体附近，导体表面会出现感应电荷，因此在原电荷和导体边界构成的场域内的场应由原电荷和感应电荷共同产生。因为一般情况下感应电荷分布较为复杂，所以直接计算合成场极为困难甚至不可能。不过，若原电荷是点电荷、线电荷或其他较为简单的分布，且导体(或介质)交界面形状也较为简单，则可采用镜像法求解这类边值问题的合成场。

镜像法是一种间接求解边值问题的方法，其基本原理是：在保持边界条件不变的情况下，将边界移去，在待求场域外部的适当位置上放置一些称为镜像电荷的等效电荷，从而将求解有边界的边值问题转换为求解无边界的问题。基于惟一性定理，原电荷和边界上感应面电荷在待求区域内某点的电位，可由原电荷和镜像电荷在该点产生的电位的叠加来代替，即利用镜像法所得的场解是惟一解。

镜像法不仅适用于静电场、静磁场，也适用于部分天线问题；不仅适用导体边界，也适用于介质边界。但镜像法能够求解的边值问题很有限。这里只讨论静电场中三个具有导体边界的应用实例。

(1) 接地导电平面附近的点电荷

如图 3.8(a)所示，设在无限大接地导电平面上方有一电量为 Q 的点电荷，点电荷与平面间的距离为 d。应用镜像法，可确定导电平面上方点电荷存在的空间中任一点 p 处的电位。

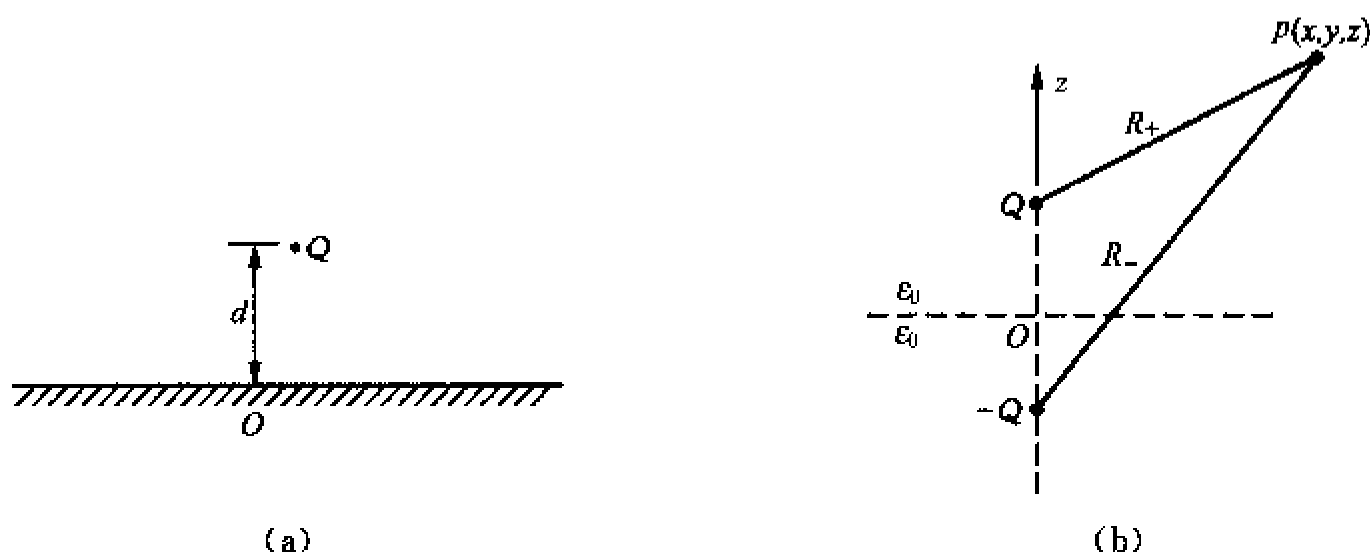


图 3.8 无限大接地导电平面上方的点电荷

选取直角坐标系如图 3.8(b)所示，使接地导电平面与 xOy 平面重合，则原点电荷所处的坐标为(0, 0, d)。将接地导电平面移去，使整个空间变成介电常数为 ε_0 的自由空间，在与原点电荷对称的位置处(即(0, 0, $-d$)处)放置电量为 $-Q$ 的镜像电荷，以代替原接地导电平面上的感应电荷。于是，当选取电位参考点在无穷远处时，原电荷 Q 和镜像电荷 $-Q$ 在 $z>0$ 的空间中任一点 $p(x, y, z)$处产生的电位为

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) \tag{3.76}$$

式中，R_+ 和 R_- 分别表示原电荷 Q 和镜像电荷 $-Q$ 至点 p 的距离，即

$$R_+ = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2},\quad R_- = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}。$$

可以证明，式(3.76)给出的 $z > 0$ 的空间中任一点的电位 V_p 是满足电位泊松方程和 $z = 0$ 处的边界条件所确定的边值问题的解。此外，根据静电场的边界条件，可由电位分布求出导电平面 ($z = 0$) 上的感应面电荷密度，即

$$\rho_S = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.77}$$

这说明，当点电荷的电量 $Q > 0$ 时，感应电荷应为负。事实上，利用式 (3.77)可求得接地导电平面上的总感应电荷 Q_{in}。不妨在 xOy 平面上改用极坐标系，令 $r^2 = x^2 + y^2$，则式(3.77)变为

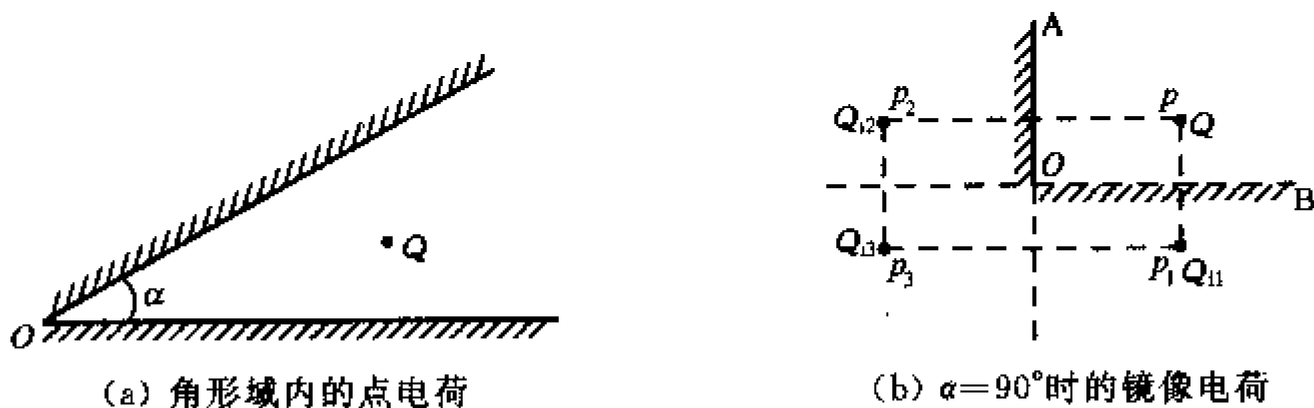
$$\rho_S = -\frac{Qd}{2\pi}(r^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}}$$

所以

$$Q_{in} = \int_S \rho_S \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}\left(-\frac{Qd}{2\pi}\right)\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{Qd}{\sqrt{(r^2 + d^2)}}\bigg|_0^{\infty} = -Q \tag{3.78}$$

这表明，导电平面上总感应电荷确实等于镜像电荷。

应指出，若点电荷 Q 放置于如图 3.9(a)所示的两接地导电平面构成的角形域内(其中 α 满足 $180°/\alpha = n, 0° < \alpha < 180°$，$n$ 为正整数)，则镜像电荷的个数 $N = (2n-1)$。具体地，当 $\alpha = 90°$ 时，如图 3.9(b)所示，可在点电荷 Q 关于接地平面 OB 对称的点 p_1 处放一镜像电荷 $Q_{i1}(=-Q)$，这样可使 OB 面为零电位面，但不能保证 OA 面为零电位面。为此，应在点 p_2 处放置另一镜像电荷 $Q_{i2}(=-Q)$，同时在点 p_3 处放置镜像电荷 Q_{i1} 及 Q_{i2} 的镜像电荷 $Q_{i3}(=Q)$，从而保持 OA 和 OB 面为零电位面。所以，p_1 处的 Q_{i1}，p_2 处的 Q_{i2}，p_3 处的 Q_{i3} 以及 p 点处的原点电荷 Q 一起可保持 OA 及 OB 面的电位为零，而角形域内任一点的电位应为上述四个点电荷产生的电位的代数和。由图 3.9(b)中的几何关系可知，上述四个电荷处于同一圆上，圆心为交角的顶点 O，半径为顶点 O 到原点电荷的距离。



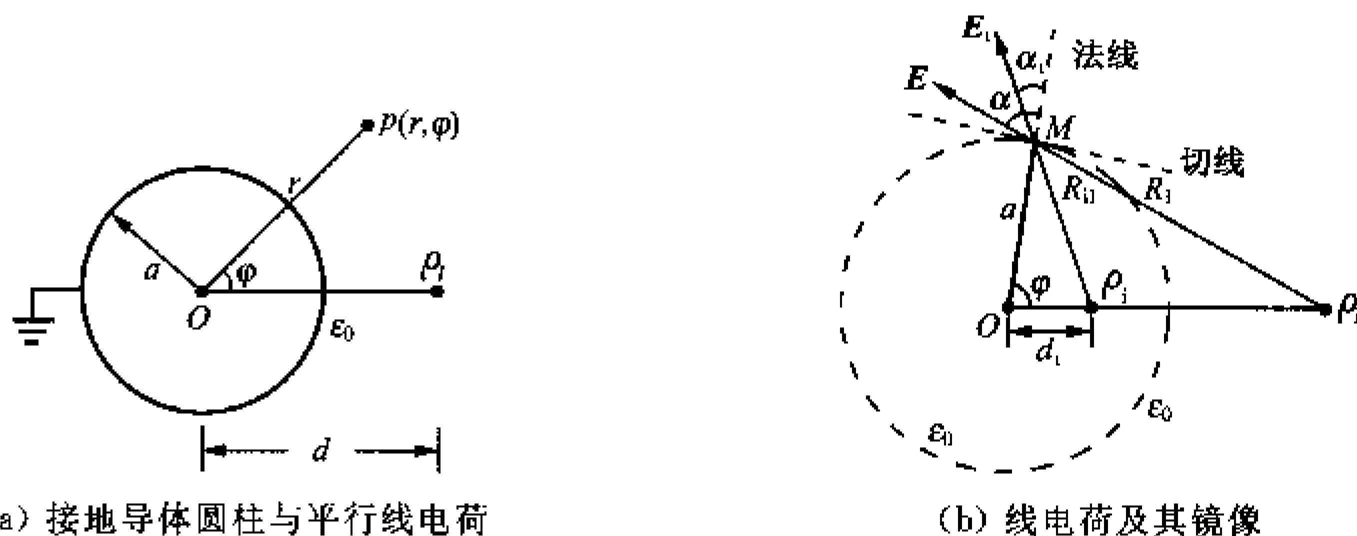
(a) 角形域内的点电荷　　(b) α=90°时的镜像电荷

图 3.9　角形域中的点电荷及其镜像

类似地，可作出 $\alpha=60°, 45°, 30°$ 等情况下的镜像电荷分布。此外，当 $\alpha=180°$ 时，对应于无限大接地导电平面上方放置点电荷的情况；当 $\alpha=0°$ 时，对应于两平行接地导电平面之间放置点电荷的情况，此时镜像电荷数应为无穷多个。

(2) 导体圆柱和平行线电荷

半径为 a 的无限长接地导体圆柱外有一根与之平行的无限长线电荷，设线电荷的电荷密度为 ρ_l，圆柱轴线与线电荷间的距离为 d，其截面如图 3.10(a)所示。根据惟一性定理，导体圆柱外电位应满足条件：① 除 ρ_l 所在点外，空间中 $\nabla^2 V=0$；② 导体圆柱及无穷远处电位为零。利用镜像法可求得接地导体圆柱外任一点 $p(r,\varphi)$处的电位。



(a) 接地导体圆柱与平行线电荷　　(b) 线电荷及其镜像

图 3.10　无限长导体圆柱与平行线电荷

为利用镜像法求得接地导体圆柱外任一点的电位，在圆柱内距离轴线为 d_i 处平行放置一根线电荷密度为 ρ_i 的长直镜像线电荷，导体圆柱轴线、原线电荷以及镜像线电荷处于同一平面，如图 3.10(b)所示。这样，接地导体圆柱外任一点 p 处的电位即由原线电荷和镜像电荷共同产生，于是，由例 3.1 的结果，有

$$V_p=-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln R-\frac{\rho_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln R_i+C \tag{3.79}$$

式中，R，R_i 分别为原线电荷，镜像线电荷所在点至场点 p 的距离，C 为常数，与电位参考点的选择有关。

为导出 ρ_i 与 ρ_l 以及 d_i 与 a 和 d 间的关系，在导体圆柱表面上任取一点 M，如图 3.10(b)所示。则原线电荷和镜像线电荷在点 M 处产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}_i$ 可由高斯定理求得，即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_l\boldsymbol{a}_{R_1}}{2\pi\varepsilon_0 R_1},\qquad \boldsymbol{E}_i=\frac{\rho_i\boldsymbol{a}_{R_{i1}}}{2\pi\varepsilon_0 R_{i1}}$$

式中，$\boldsymbol{a}_{R_1}$，$\boldsymbol{a}_{R_{i1}}$ 分别表示从原线电荷和镜像线电荷至 M 点的距离矢量上的单位矢量。由静电场的边界条件可知，导体圆柱表面上任一点的电场强度的切向分量应为零，即在 M 点应有

$$E_\tau+E_{i\tau}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_1}\sin\alpha+\frac{\rho_i}{2\pi\varepsilon_0 R_{i1}}\sin\alpha_i=0 \tag{3.80}$$

式中，α 和 α_i 分别表示 M 点处矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}_i$ 与导体圆柱表面外法线间的夹角。根据图 3.10(b)中的几何关系，由正弦和余弦定理，分别有

$$\frac{R_1}{\sin\varphi}=\frac{d}{\sin\alpha},\qquad \frac{R_{i1}}{\sin\varphi}=\frac{d_i}{\sin\alpha_i}$$

以及 $R_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi$， $R_{i1}^2 = a^2 + d_i^2 - 2ad_i\cos\varphi$

将上述关系代入式(3.80)，整理可得

$$\rho_l d R_{i1}^2 + \rho_i d_i R_1^2 = 0$$

或 $$[\rho_l d(a^2 + d_i^2) + \rho_i d_i(a^2 + d^2)] - 2add_i(\rho_l + \rho_i)\cos\varphi = 0$$

可见，若上式对任意角度 φ 均能成立，则其充要条件为

$$\left.\begin{aligned} &\rho_l d(a^2 + d_i^2) + \rho_i d_i(a^2 + d^2) = 0 \\ &\rho_l + \rho_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.81}$$

联立以上两式求解，得一组解(另一组解不合理被舍去)为

$$\left.\begin{aligned} \rho_i &= -\rho_l \\ d_i &= \frac{a^2}{d} \end{aligned}\right\} \tag{3.82}$$

由于导体圆柱接地，导体圆柱内部及其表面电位为零，于是

$$V_M = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_{i1}}{R_1}\right) + C = 0$$

即

$$C = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_{i1}}{R_1}\right)$$

将上式代入式(3.79)，可得接地导体圆柱外任一点的电位为

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_i}{R}\frac{R_1}{R_{i1}}\right) \tag{3.83}$$

式中，$R = (r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$，$R_i = (r^2 + d_i^2 - 2rd_i\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$，分别为原线电荷和镜像线电荷至点 $p(r, \varphi)$ 的距离。

因为导体圆柱面为等位面，这样由 V_M 的表达式可知，$R_{i1}/R_1 = \text{const.}$。于是，由图 3.10(b) 有，$\overline{Op_i}/a = a/\overline{Op_l}$，即 $\Delta Op_iM \backsim \Delta OMp_l$，故 $R_{i1}/R_1 = d_i/a = a/d$。因此，接地导体圆柱外任一点的电位可表示为

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_i}{R}\frac{d}{a}\right) \tag{3.84}$$

由接地导体圆柱外任一点 V 的表达式，可得导体圆柱表面的面电荷密度为

$$\rho_S = -\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\frac{\rho_l(d^2 - a^2)}{2\pi a(d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi)}$$

于是，导体圆柱外表面上单位长度的感应电荷为

$$\int_S \rho_S \mathrm{d}S = -\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\frac{\rho_l(d^2 - a^2)\mathrm{d}\varphi}{2\pi a(d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi)} = -\rho_l \tag{3.85}$$

可见，导体圆柱外表面上单位长度的感应电荷等于线电荷密度的负值。

同样，可求得单位长度的线电荷所受到的静电力的大小为

$$f = -\frac{\rho_l^2 d}{2\pi\varepsilon_0 (d^2 - a^2)}$$

式中，负号表示吸引力。

应指出，若导体圆柱不接地也不带电，导体圆柱表面总的感应电荷量在外场的作用下始终为零(即呈电中性)。这样，若用一任意沿轴线方向的单位长度的闭合面包围此圆柱面，则闭合面内电荷量应为零。但当采用镜像法分析时，导体圆柱内有镜像电荷存在，若在圆柱面外作单位长度的闭合面，单位长度的闭合面内包含的电荷量等于 ρ_i 而不是零。因此，仅靠一个镜像线电荷不能够与原问题在圆柱外等效。因为镜像线电荷和原线电荷已使导体圆柱面的电位为零，所以，为使导体圆柱面为电位不为零的等位面，且满足所作任意包围单位长度导体圆柱的闭合面内总电荷量为零，则只有在导体圆柱轴线上放置一等效线电荷，其密度为 $\rho_i' = -\rho_i$。这样，镜像线电荷 ρ_i 和 ρ_i' 就与导体圆柱表面的感应电荷在圆柱面外产生的电位等价。于是，导体圆柱外任一点的电位为

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_i}{R}\frac{R_1}{R_{i1}}\right) + \frac{\rho_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{C_1}{r}\right) \tag{3.86}$$

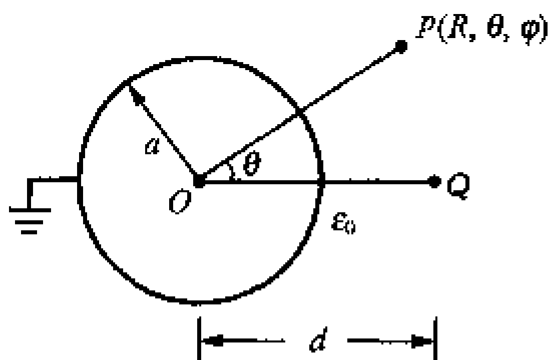
式中，C_1 是与参考点选取有关的常数。

若导体圆柱的单位长度带有电荷 ρ_{l0} 时，为满足在圆柱外沿圆柱轴向作单位长度的闭合面，闭合面内包围的电荷量应等于 ρ_{l0}，同时考虑到圆柱表面应为等位面的条件，此时应在圆柱轴线上放置等效的线电荷 $\rho_i' = \rho_{l0} - \rho_i$。于是镜像线电荷 ρ_i 和等效线电荷 ρ_i' 就与圆柱导体表面的感应电荷在圆柱外产生的电位等价。因此圆柱外任一点的电位为

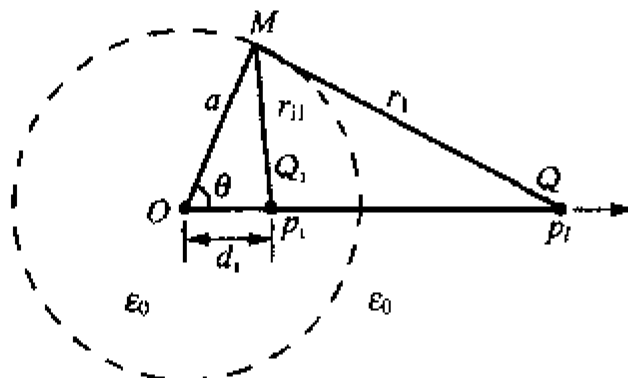
$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_i}{R}\frac{d}{a}\right) + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{C_1}{r}\right) + \frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right) \tag{3.87}$$

(3) 导体球和点电荷

一半径为 a 的接地导体球外有一电荷量为 Q 的点电荷，球心与点电荷间的距离为 $d(d > a)$，如图 3.11(a)所示。选取圆球坐标系，利用镜像法可确定球外任一点 $p(R, \theta, \varphi)$处的电位 V，根据球的对称性，电位 V 与角度变量 φ 无关。



(a) 接地导体球和点电荷



(b) 点电荷及其镜像

图 3.11 接地导体球和点电荷

因点电荷置于接地导体球附近，放接地导体球表面感应出负电荷，为不改变导体球外表面上的电荷分布，镜像电荷必须处于球内。又因球对称性，故此镜像电荷 Q_1 一定同球心及

点电荷 Q 处于同一直线上，设 Q_i 距球心的距离为 d_i，如图 3.11(b)所示。这样，球外任一点 p 处的电位由点电荷 Q 和镜像电荷 Q_i 共同产生。为确定 Q_i 及 d_i 的表达式，可利用球面上任一点的电位为零的边界条件导出。为此，在球面上任取一点 M，如图 3.11(b)所示，设点 M 与原电荷 Q 和镜像电荷 Q_i 所在点 p_i 和 p_i 间的距离分别为 r_{i1} 和 r_1，则有

$$V_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i1}} = 0 \tag{3.88}$$

式中，$r_1 = (a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，$r_{i1} = (a^2 + d_i^2 - 2ad_i\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$。这样，将 r_1 和 r_{i1} 代入式(3.88)即得

$$[Q^2(a^2 + d_i^2) - Q_i^2(a^2 + d^2)] + 2a\cos\theta(Q_i^2 d - Q^2 d_i) = 0$$

由此可见，若上式对任意角度 θ 均能成立，则其充要条件为

$$\left.\begin{aligned} Q^2(a^2 + d_i^2) - Q_i^2(a^2 + d^2) = 0 \\ Q_i^2 d - Q^2 d_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.89}$$

联立求解可得其一组解(另一组解不合理，舍去)为

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= -\frac{aQ}{d} \\ d_i &= \frac{a^2}{d} \end{aligned}\right\}$$

这样，接地导体球外任一点 p 处的电位为

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{dr_i}\right) \tag{3.90}$$

式中，$r = (R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，$r_i = (R^2 + d_i^2 - 2Rd_i\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，分别表示从点电荷 Q 和镜像电荷 Q_i 到球外任一点 p 的距离。于是，由式(3.90)可得接地球面上的感应面电荷密度为

$$\begin{aligned} \rho_S &= -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial R}\bigg|_{R=a} = \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{R - d\cos\theta}{r^3} - \frac{\left(\frac{d}{R}\right)^2\left[R - \left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]}{r^3}\right\}\Bigg|_{R=a} \\ &= -\frac{Q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{3.91}$$

而球面上总感应电荷为

$$Q_{in} = \int_S \rho_S \mathrm{d}S = -\frac{Q(d^2 - a^2)}{4\pi a}\int_0^\pi \frac{2\pi a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{aQ}{d} = Q_i \tag{3.92}$$

即接地球面上的总感应电荷量等于镜像电荷量。

同样可证明，接地导体球对点电荷 Q 的作用力等于镜像电荷 Q_i 对 Q 的作用力，即

$$F = -\frac{\left(\frac{a}{d}\right)Q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(d - \frac{a^2}{d}\right)^2} = -\frac{adQ^2}{4\pi\varepsilon_0(d^2 - a^2)^2} \tag{3.93}$$

同导体圆柱与平行线电荷的情况类似，当导体球不接地时，其电位不为零，但球面上感应的净电荷为零(即导体球面呈电中性)，正负两种感应电荷都对球外区域的位场分布有影响。于是，在导体球内部应同时放置两种球表面感应电荷对应的镜像电荷，又因球面是等位面，故除在点 p_i 处放置一个镜像电荷 Q_i 外，还需在球心处放置另一个镜像电荷 $Q_i'(=-Q_i)$。所以，导体球外任一点 p 处的电位应由原电荷和两个镜像电荷共同产生，即

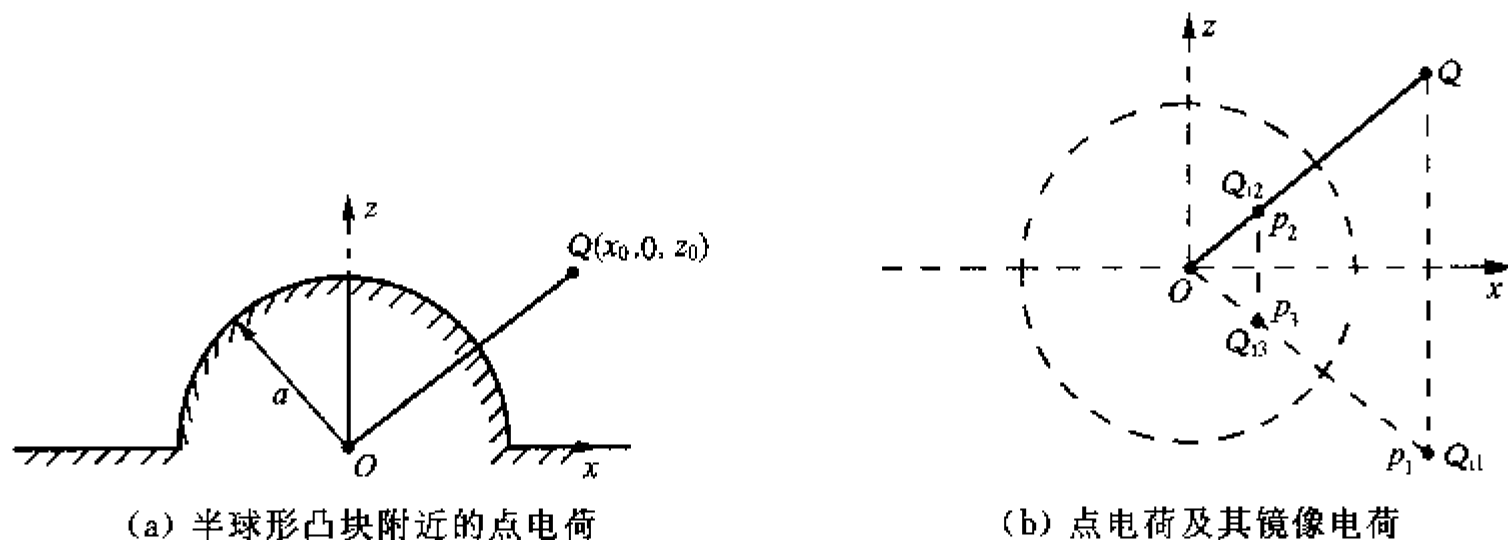
$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}+\frac{Q_i'}{4\pi\varepsilon_0 r_i'}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{dr_i}+\frac{a}{dR}\right) \tag{3.94}$$

式中，$r_i'=R$。此时球面上 M 点的电位为

$$V_M=\frac{Q_i'}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{3.95}$$

显然 V_M 不为零。

例 3.6 一无限大接地导体平面上有一半径为 a 的半球形导体凸块，此凸块附近有一个点电荷 Q，如图 3.12(a)所示。试确定此电荷的镜像电荷。



(a) 半球形凸块附近的点电荷　　(b) 点电荷及其镜像电荷

图 3.12 接地导体平面和半球形凸块附近的点电荷

解：首先作点电荷 Q 关于接地平面处于点 p_1 处的镜像电荷 $Q_{i1}(=-Q)$，p_1 点的坐标是 $(x_0,0,-z_0)$；然后作点电荷 Q 关于接地导体球面处于点 p_2 处的镜像电荷 $Q_{i2}(=-aQ/\sqrt{x_0^2+z_0^2})$，点 p_2 位于坐标原点 O 与点电荷 Q 的连线上，且与原点的距离为 $d_i(=a^2/\sqrt{x_0^2+z_0^2})$；最后作镜像电荷 Q_{i2} 关于接地平面处于点 p_3 处的镜像电荷 $Q_{i3}(=-Q_{i2})$，而 Q_{i1} 关于球面的镜像电荷也为 Q_{i3}，点 p_3 位于坐标原点 O 与镜像电荷 Q_{i1} 的连线上，且与原点的距离也为 d_i。如图 3.12(b)所示。这样，用三个镜像电荷即可代替原接地导电平面和半球形导体凸块上的感应电荷。

3.1.7 静电场的能量、能量密度及电场力

1) 静电场的能量和能量密度

假设所考虑的区域 Ω 中没有电场存在，并设想有 n 个点电荷，每个点电荷都存在于距区域 Ω 无穷远处。

为分析方便，先考虑三个点电荷的情况，如图 3.13 所示。若将其中一个点电荷 Q_1 从无

穷远处移到 p_1 处，因为该电荷没有受到任何力的作用，所以外力做功为零，即 $W_{e1}=0$，但 Q_1 的出现便在区域 Ω 中建立了电位分布。若再将另一个点电荷 Q_2 从无穷远处移到 p_2 处，则外力做的总功为

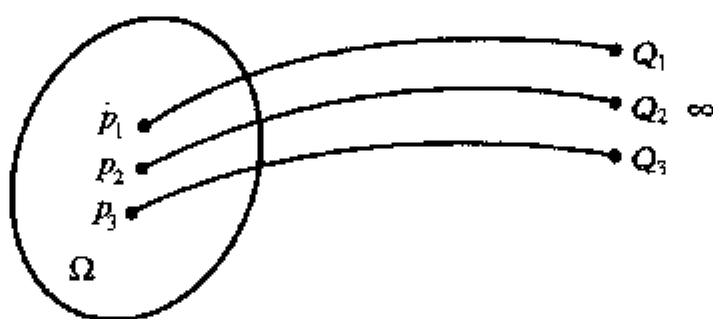


图 3.13 无穷远处的三个点电荷移入区域 Ω 内

$$W_e=W_{e1}+W_{e2}=0+Q_2V_{2,1}$$

式中，$V_{2,1}$ 为 p_1 处的点电荷在 p_2 处产生的电位，而电位参考点选在无穷远处。这样，将三个点电荷从无穷远处移到 p_1,p_2,p_3 处外力做的总功为

$$W_e=W_{e1}+W_{e2}+W_{e3}=0+Q_2V_{2,1}+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2}) \tag{3.96}$$

式中，$V_{3,1}$，$V_{3,2}$ 分别为 p_1 处的电荷 Q_1 以及 p_2 处的电荷 Q_2 在 p_3 处产生的电位。与上述三个点电荷移入区域 Ω 的次序相反，将点电荷 Q_3，Q_2 以及 Q_1 依次移入区域 Ω 中的 p_3，p_2 以及 p_1 处，则外力做的总功为

$$W_e=W_3+W_2+W_1=0+Q_2V_{2,3}+Q_1(V_{1,3}+V_{1,2}) \tag{3.97}$$

将式(3.96)和式(3.97)相加，即得外力做功的两倍：

$$2W_e=Q_1(V_{1,2}+V_{1,3})+Q_2(V_{2,1}+V_{2,3})+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2})$$

式中，$V_{1,2}+V_{1,3}$ 是 p_2，p_3 处的点电荷 Q_2，Q_3 在 p_1 处产生的电位，即 $V_1=V_{1,2}+V_{1,3}$。同理，$V_2=V_{2,1}+V_{2,3}$，$V_3=V_{3,1}+V_{3,2}$。根据能量守恒定律，外力做功应转换为区域 Ω 中的电场储能。于是，包含三个点电荷的区域 Ω 中电场的总储能为

$$W_e=\frac{1}{2}(Q_1V_1+Q_2V_2+Q_3V_3)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}Q_iV_i \tag{3.98}$$

这样，将式(3.98)推广到区域 Ω 包含 n 个点电荷的情况，有

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Q_iV_i \tag{3.99}$$

若区域 Ω 包含连续分布的体电荷和面电荷，则式(3.99)变为

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho V\mathrm{d}V'+\frac{1}{2}\oint_{S'}\rho_S V\mathrm{d}S' \tag{3.100}$$

式中，V 为体电荷和面电荷所在点的电位，ρ 和 ρ_S 分别为体电荷和面电荷密度。

根据式(3.100)，可导出静电场能量的另一种表达式，并由此可引入电场能量密度的概念。

由高斯定理：$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$，式(3.100)中的第一个积分的被积函数变为 $\rho V=V\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})-\boldsymbol{D}\cdot\nabla V$。于是，式(3.100)变为

$$\begin{aligned}W_e&=\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{D}\cdot\nabla V\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i'}\rho_{S_i'}V_i\mathrm{d}S_i'\\&=\frac{1}{2}\oint_S V\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_{S_i'}Q_{S_i'}\end{aligned} \tag{3.101}$$

式中，Q_{S_i}表示以面电荷分布的第 i 个带电导体表面上的电荷量，V_i 表示第 i 个带电导体表面的电位，为定值。此外，上式中的积分范围与式(3.100)不同，式(3.100)中第一项的体积分范围 V'是有体电荷分布的空间，而式(3.101)的体积分范围应是所研究的全部有电场存在的空间，即包围此空间的球面半径 $R\to\infty$。对式(3.101)中第一项的面积分，其积分范围是无限大球面以及包围各带电导体的表面积 S_1，S_2，…，S_n。因在包围体积 V 的球面上，电位 V 按 $1/R$ 变化，电位移通量 $\boldsymbol{D}$ 的大小按 $1/R^2$ 变化，而球的表面积按 R^2 变化，所以当 $R\to\infty$ 时，该面积分为零。又因为包围各带电导体的表面 S_1，S_2，…，S_n 的外法线方向与各导体表面 S_1'，S_2'，…，S_n'的外法线方向恰好相反。因此，除无限大球面积分为零外，式(3.101)中的第一项和第三项相互抵消。于是，式(3.101)变为

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{3.102}$$

式中，体积分的范围是整个电场存在的空间，表示能量存在于电场中。上式中的被积函数被定义为空间任一点的电场能量密度，即

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.103}$$

对简单媒质，有

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} \tag{3.104}$$

2) *用虚位移法求电场力*

我们知道，当一个带电导体放置于外电场中时，它要受到电场的作用力。利用库仑定律可计算电场力，但能求解的问题十分有限，通常求解也较为麻烦。对某些静电力的求解问题，若利用虚位移法求解则容易得多。所谓虚位移，是假想的位移而不是真正的位移。虚位移法就是假想在带电导体系统中，某一导体或系统的填充媒质位移引起能量改变，从而导出作用于该导体或填充媒质上的力。虚位移法的理论根据是能量守恒定律。能量守恒定律指出，在没有能量损耗的情况下，外源供给带电系统的能量等于系统所做的机械功与系统储能的增量之和，即

$$\Delta W_s = \Delta W + \Delta W_e \tag{3.105}$$

式中，ΔW_s 表示外源供给系统的电场能量，ΔW 表示导体或系统填充的媒质因位移所做的机械功，ΔW_e 表示系统储能的增量。若带电系统中导体或填充媒质在电场力 F_l 作用下产生的虚位移(大小)为 Δl，则电场力所做的虚功 $\Delta W = F_l\Delta l$。将 ΔW 代入式(3.105)，并令 $\Delta l\to 0$，得

$$F_l = \frac{\partial W_s}{\partial l} - \frac{\partial W_e}{\partial l} \tag{3.106}$$

下面分两种情况讨论。

(1) 导体所带电荷量不变

若虚位移过程中各导体均不同外源连接，则外源向系统输入的能量等于零，即 $\Delta W_s = 0$，

此时各导体所带的电荷量不变，由式(3.106)，有

$$F_l = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial l}\right|_{Q=\text{const.}} \tag{3.107a}$$

一般地，可将式(3.107a)用 W_e 的负梯度表示，即

$$\boldsymbol{F}_Q = -\nabla W_e \tag{3.107b}$$

这表明，在所有导体所带电荷量均保持不变的情况下，某一导体或系统填充媒质沿某方向受到的作用力大小，等于它沿此方向位移单位距离所引起的系统电场能量的减少量。

(2) 导体的电位不变

为了使某一导体或系统填充媒质的虚位移过程中各带电导体的电位均保持不变，每个导体必须同恒压源相连。假设各导体的电位分别为 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，虚位移过程中各电源所供给各导体的电荷的增量分别为 ΔQ_1，ΔQ_2，…，ΔQ_n，于是外电源所做的总功 $\Delta W_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i$。因此，由式(3.106)可得

$$F_l = \left.\frac{\partial W_e}{\partial l}\right|_{V=\text{const.}} \tag{3.108a}$$

若将上式用矢量形式表示，则为

$$\boldsymbol{F}_V = \nabla W_e \tag{3.108b}$$

这表明，在所有导体的电位保持不变的情况下，某一导体或系统填充媒质沿某方向受到作用力的大小，等于它沿此方向位移单位距离所引起的系统电场能量的增加量。

若系统中导体或填充媒质不是平移而是旋转，依照上述思路同样可进行分析，这里不再赘述。

例 3.7　如图 3.14 所示为一极板面积很大的平行板电容器，其宽度为 a，长度为 l，板间距离为 d。电容器的一部分空间(宽度为 x)放置介电常数为 ε 的介质块，而另一部分空间(宽度为 $a-x$)仍为空气。试计算介质块单位面积受到的电场力。

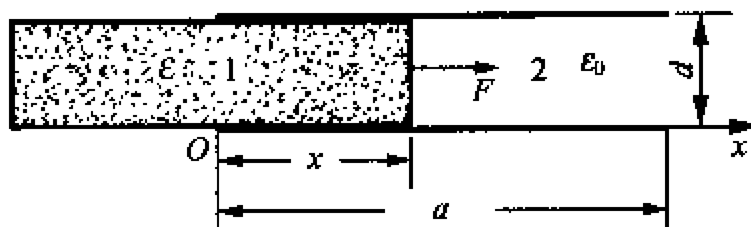


图 3.14　部分填充介质块的平行板电容器

解：因电容器的极板面积很大，故可忽略其边缘效应。

方法Ⅰ：假设两极板间电压 U 不变，电容器储能为

$$W_e = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon l x}{d}U^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 l(a-x)}{d}U^2$$

设有一沿 x 方向的外力，使介质块产生虚位移，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_U &= \boldsymbol{a}_x F_x = \boldsymbol{a}_x \left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_{U=\text{const.}} = \frac{lU^2}{2d}\,\frac{\partial}{\partial x}[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]\boldsymbol{a}_x \\ &= \frac{U^2 l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2d}\boldsymbol{a}_x = \frac{E^2 l d}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{a}_x\end{aligned}$$

于是,介质块单位面积受到的电场力为

$$f_U = \frac{F_U}{ld} = \frac{1}{2}E^2(\varepsilon - \varepsilon_0)a_x$$

方法Ⅱ:假设保持两极板上的总电荷量 Q 不变。在电容器内,$E_1 = \rho_{S1}/\varepsilon_0$,$E_2 = \rho_{S2}/\varepsilon$。在介质分界面上,应有 $E_1 = E_2 = E$。于是,极板上的总电荷量为

$$Q = \rho_{S2}xl + \rho_{S1}(a-x)l = [\varepsilon E_2 x + \varepsilon_0 E_1(a-x)]l = E[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]l$$

由此得到电场强度 $E = \dfrac{Q}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]l}$,板间的电压 $U = Ed = \dfrac{Qd}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]l}$。于是,电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]l}$$

所以

$$F_Q = -a_x\frac{\partial W_e}{\partial x}\bigg|_{Q=\text{const.}} = \frac{Q^2 d}{2l}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]^2}a_x = \frac{E^2 ld}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)a_x$$

$$f_U = \frac{F_Q}{ld} = \frac{1}{2}E^2(\varepsilon - \varepsilon_0)a_x$$

3.2 恒定电场

恒定电场,又称为恒流电场,是指由不随时间变化的电流产生的电场。恒定电场中所有电荷均视为以平均速度运动,即电荷的分布在任何时刻都是不变的。因此,恒定电场的性质和静电场是可以比拟的。

3.2.1 恒定电场的基本方程

由于载恒定电流(直流)的导电媒质中电荷分布不随时间改变,因此由恒定电流产生的电场和静止电荷产生的电场的性质相同。静止电荷产生的场是保守场,所以恒定电场也是保守场,即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \text{或} \quad \oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \tag{3.109}$$

根据电流连续性方程可知,当导电媒质中流过恒定电流时,媒质中任何一个体积 V 内电荷量应不随时间变化,即任何时刻流入体积 V 的电荷量应等于从该体积内流出的电荷量,这样,穿过包围此体积的封闭面 S 的体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的通量等于零,即

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{3.110}$$

式(3.109)和式(3.110)就是恒定电场的基本方程。这表明,载直流的导电媒质中的电场是无旋场,电流是无散场。

3.2.2 恒定电场的边界条件

根据恒定电场在导电媒质情况下积分形式的基本方程，可导出恒定电场中两种不同导电媒质交界面上的边界条件。由于导电媒质中恒定电场满足的积分形式的基本方程和静电场的基本相同，由此导出的边界条件也相似。这里不再作详细推导，仅提供结果。

对电场强度，有

$$\boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \quad 或 \quad E_{1t} = E_{2t} \quad 以及 \quad V_1 = V_2 \tag{3.111}$$

又因为 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，因此，在两种不同导电媒质的分界面上，$\boldsymbol{J}$的切向分量应满足以下关系：

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{3.112}$$

对电流密度$\boldsymbol{J}$，有

$$\boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{J}_1 - \boldsymbol{J}_2) = 0 \quad 或 \quad J_{1n} = J_{2n} \quad 以及 \quad \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \tag{3.113}$$

再由 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，上述边界条件也可用$E$的法向分量表示，即

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{3.114}$$

从式(3.111)和式(3.113)可得，在两种导电媒质的交界面上，电场强度的切向分量连续，电流密度的法向分量连续。此外，在两种不同导电媒质的交界面上，因存在自由面电荷密度，故面电荷密度 ρ_S 可表示为

$$\rho_S = D_{1n}\left(1 - \frac{\sigma_1 \varepsilon_2}{\sigma_2 \varepsilon_1}\right) = E_{1n}\left(\frac{\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_2}\right) = J_{1n}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right) \tag{3.115}$$

特别地，当第一种媒质为导电媒质，第二种媒质为理想介质时，由于理想介质完全绝缘，即 $\sigma_2 = 0$，则必有 $J_2 = 0$。又由式(3.86)可知，$J_{1n} = J_{2n}$。这表明，此时导电媒质中不可能存在法向的电流，电流线必与交界面相平行，这同实际情况完全吻合。

3.2.3 恒定电场与静电场的类比关系

因为恒定电场和静电场具有相同的性质，因此导出恒定电场和静电场间的类比关系将有助于某些实际问题的求解。为此，将恒定电场和静电场的基本方程和边界条件进行对比可知，$\boldsymbol{J}$与$\boldsymbol{D}$对应，σ 与 ε 对应。因此，若两电极的形状和边界条件相同，则两电极的电导 G 与电容 C 之间存在以下关系：

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{3.116}$$

这样，利用这个关系式，只要将静电场中电容 C 的表达式中的 ε 换为 σ，就得到 G 的表达式。例如，由例 3.3 已知填充介电常数为 ε 的介质的同轴线的单位长度电容 $C = 2\pi\varepsilon / \ln \dfrac{b}{a}$，将 C

中的ε换为σ，即得填充电导率为σ的导电媒质的同轴线的单位长度的电导$G = 2\pi\sigma/\ln\dfrac{b}{a}$。

3.3 静磁场

由恒定电流（或永久磁铁）建立的磁场是不随时间变化的，故称为静磁场（或恒定磁场）。尽管由恒定电流产生的静磁场和静电场的性质不同，但它们的分析方法有共同之处。

3.3.1 静磁场的基本方程

在第2章中，我们已引出了毕奥—萨伐尔定律。根据此定律可以导出静磁场的磁通量密度$\boldsymbol{B}$对任意封闭面的面积分和沿任意封闭曲线的线积分，这构成了静磁场积分形式的基本方程。

在静磁场中，若过封闭曲线l任取一封闭曲面S，则可计算穿过此封闭曲面的$\boldsymbol{B}$的通量。将毕奥—萨伐尔定律代入此封闭曲面的面积分，有

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{a}_R}{R^2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{4\pi}\cdot\oint_S \frac{\boldsymbol{a}_R\times \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^2}$$
$$= \oint_l \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{4\pi}\cdot\oint_S -\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

将旋度定理代入上式中，即得

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{4\pi}\cdot\int_V \nabla\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{3.117a}$$

式中，$\nabla\times\nabla(1/R)=0$。这表明，穿过任意封闭面的磁通量等于零。再利用散度定理，则上式变为

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = 0 \quad 或 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.117b}$$

可见，磁通量密度为无散场。式(3.117)称为磁通连续性原理，即磁感应线（磁力线）总是闭合曲线，这是静磁场（包括时变磁场）的一个基本方程。

静磁场的另一个基本方程是安培环路定律，在真空中，其积分和微分形式分别为

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \quad 及 \quad \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} \tag{3.118}$$

3.3.2 静磁场的矢量磁位及其方程

1）矢量磁位

在第2章中，已引入矢量磁位$\boldsymbol{A}$，它定义为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

据此，由毕奥-萨伐尔定律的体积分形式以及矢量恒等式，可得

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}_R}{R^2}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times \boldsymbol{J}\right]\mathrm{d}V' = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}}{R}\mathrm{d}V'\right]$$

将此式与式(2.76a)比较，可得

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}}{R}\mathrm{d}V' \tag{3.119}$$

同理，若电流分布在曲面及细导线回路上，则有

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\boldsymbol{J}_S}{R}\mathrm{d}S' \tag{3.120a}$$

以及

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'} \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R} \tag{3.120b}$$

上述各式中，R 是从电流元到待求矢量磁位的场点之间的距离，它们的 $\boldsymbol{A} = 0$ 的参考点选在无穷远处。换言之，若电流分布延伸至无穷远处，上述表达式不再适用。

由此可见，若已知空间中的电流分布，则可按式(3.119)及式(3.120)先求得$\boldsymbol{A}$，然后将$\boldsymbol{A}$代入式(2.76a)即可求得$\boldsymbol{B}$。事实上，对电流对称分布的问题，采用安培环路定律直接求解$\boldsymbol{B}$则更为方便。

将式(2.76a)代入磁通量 Φ 的表达式(2.34)，并利用斯托克斯定理，即得

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.121}$$

式中，l 表示曲面边缘的闭合曲线。这表明对$\boldsymbol{A}$作闭曲线积分同样可求得磁通量。

2) 矢量磁位方程

从前面的讨论可知，若已知有限区域上的电流分布，则可通过式(3.119)或式(3.120)求得空间中的矢量磁位$\boldsymbol{A}$。但当电流分布在一体积内时，$\boldsymbol{A}$的体积分一般较为复杂，此时若采用$\boldsymbol{A}$的微分方程求解则要方便得多。

为导出$\boldsymbol{A}$满足的偏微分方程，将式(2.76a)代入安培环路定律(3.118)，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{3.122}$$

对上式应用矢量恒等式，即得

$$\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{3.123}$$

在静磁场情况下，$\boldsymbol{A}$的散度通常按库仑规范选取，即在上式中令 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$。于是，有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{3.124}$$

这就是矢量磁位的泊松方程。显然，在直角坐标系下，上述方程可写成三个分量形式，即

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i \tag{3.125}$$

式中，$i=x, y, z$。特别地，在体电流密度为零的区域，方程(3.124)变为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}=0 \qquad (3.126)$$

此时矢量磁位满足拉普拉斯方程。

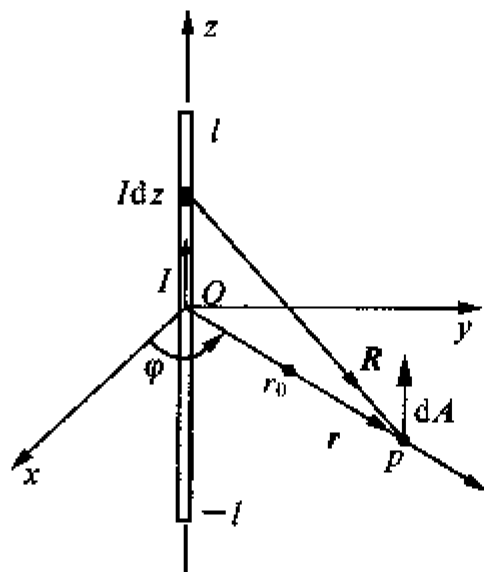


图 3.15 载流直导线的矢量磁位

例 3.8 如图 3.15 所示，求沿 z 轴放置，长为 $2l$，载直流为 I 的直导线在 xOy 平面上任一点 p 处的矢量磁位，并导出 $l \to \infty$ 情况下 p 处的矢量磁位及磁通量密度。

解：① 因电流沿 z 向流动，故 xOy 平面上任一点 p 处的矢量磁位只有 z 向分量 A_z。选取如图所示的圆柱坐标系，在载流导线距坐标原点为 z 处取一电流元 $I\mathrm{d}z$，则 p 点距此电流元的距离矢量 $\boldsymbol{R}=r\boldsymbol{a}_r-z\boldsymbol{a}_z$。于是，$xOy$ 平面上的任一点 p 处的$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_z A_z=\boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}z}{R}=\boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(l+\sqrt{l^2+r^2}\right)-\ln\left(\sqrt{l^2+r^2}-l\right)\right] \qquad (3.127)$$

当 l 很大时，$l \gg r$，此时因 $l+\sqrt{l^2+r^2}\approx l+l\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\approx 2l$，以及 $\sqrt{l^2+r^2}-l\approx\frac{r^2}{2l}$，故式(3.127)近似为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{2l}{r}\right) \qquad (3.128)$$

② 由式(3.128)可知，当 $l \to \infty$ 时，$\boldsymbol{A}\to\infty$，此结果不合理，这是由参考点选在无穷远处引起的。因此，将 $\boldsymbol{A}=0$ 的参考点选在 $r=r_0$ 处，如图所示。有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_z\left\{\lim_{l\to\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r_0^2+z^2}}\right)\mathrm{d}z\right\}$$

$$=\boldsymbol{a}_z\left\{\lim_{l\to\infty}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left[\frac{(z/r)+\sqrt{1+(z/r)^2}}{(z/r_0)+\sqrt{1+(z/r_0)^2}}\right]\Bigg|_0^l\right\}=\boldsymbol{a}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \qquad (3.129)$$

于是，点 p 处的$\boldsymbol{B}$为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_z}{\partial r}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (3.130)$$

上式同由毕奥—萨伐定律求得的无限长载流直导线产生的磁通量密度$\boldsymbol{B}$的表达式完全相同。

3.3.3 磁介质中的静磁场

1) 磁偶极子

磁偶极子是指半径很小的圆形平面载流回路。图 3.16 所示为一个半径为 b，载有恒定

电流 I 的细导线圆形回路，它位于 xOy 平面且中心与坐标原点重合。可利用式(3.120b)计算此回路电流在空间任一点 p 处产生的矢量磁位，进而求得磁通量密度$\boldsymbol{B}$。考虑到电流 I 关于 z 轴旋转对称，它所产生的矢量磁位在圆球坐标系中只有 A_φ 分量，且仅是坐标变量 R 和 θ 的函数。根据 A_φ 的上述特点，可假设 p 点位于 xOz 平面内，且远离载流圆环，如图 3.16 所示。

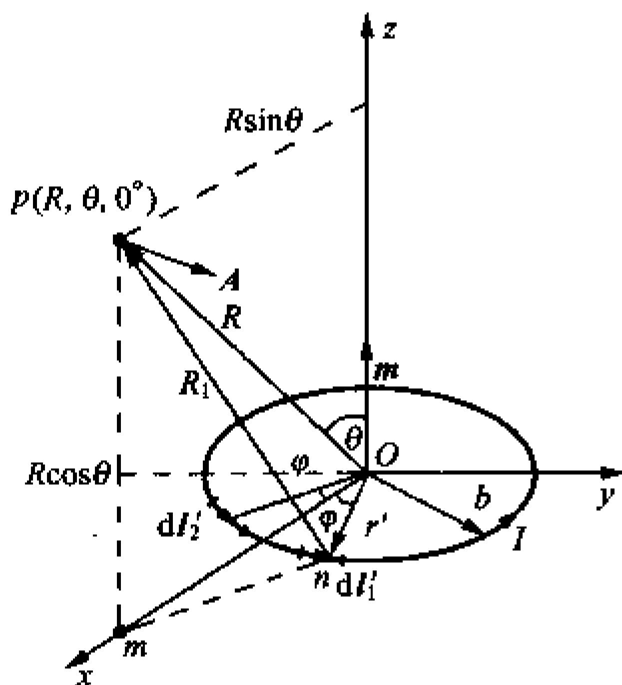


图 3.16 磁偶极子

为便于分析，在载流圆环上位于 xOz 面的两侧 φ 和 $-\varphi$ 处分别取两个电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，并令 $\mathrm{d}l_1=\mathrm{d}l_2=\mathrm{d}l=b\mathrm{d}\varphi$，它们在点 p $(R,\theta,0^\circ)$处产生的矢量磁位微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{A}_2$ 的方向分别平行于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，其表达式分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R_1}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R_1}(-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\cos\varphi)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R_1}(\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\cos\varphi)$$

这样，一对电流元在 p 点产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}\boldsymbol{A}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 Ib}{2\pi R_1}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

于是，整个载流圆环在 p 点产生的$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\cos\varphi}{R_1}\mathrm{d}\varphi \tag{3.131}$$

式中，R_1 可根据图中的几何关系得到，即

$$R_1=[(mp)^2+(mn)^2]^{\frac{1}{2}}=[(R\cos\theta)^2+(b\sin\varphi)^2+(R\sin\theta-b\cos\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$=(R^2+b^2-2Rb\sin\theta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

假设 $R\gg b$，故 b^2/R^2 可以忽略。于是

$$\frac{1}{R_1}\approx\frac{1}{R}\left(1-\frac{2b}{R}\sin\theta\cos\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{R}\left(1+\frac{b}{R}\sin\theta\cos\varphi\right) \tag{3.132}$$

式中利用了二项式级数展开式，并略去平方项以上的高阶微量。将式(3.132)代入式(3.131)，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^\pi\frac{1}{R}\left(1+\frac{b}{R}\sin\theta\cos\varphi\right)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 I\pi b^2}{4\pi R^2}\sin\theta=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 IS}{4\pi R^2}\sin\theta=\frac{\mu_0\,\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{a}_R}{4\pi R^2} \tag{3.133}$$

式中，$S = \pi b^2$，是导线圆环的面积，而 $\boldsymbol{m} = IS$，称为磁偶极子的磁矩，简称磁偶极矩，其方向与电流 I 的方向之间满足右手螺旋关系。

将式(3.133)代入式(2.76a)，并在球坐标系下展开，得

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\boldsymbol{a}_R 2\cos\theta + \boldsymbol{a}_\theta \sin\theta) \tag{3.134}$$

上式在形式上与电偶极子产生的电场强度的表达式(3.21)相似。因此，称圆形载流回路为磁偶极子。通过作图可知，磁偶极子的磁力线与电偶极子的电力线的分布形状在它们的外部相同，内部不同。

2) 磁介质中的静磁场

与电介质在恒定电场作用下要产生极化现象相似，磁介质在外加恒定磁场的作用下也会产生磁化现象，使磁介质中的分子电流的磁矩(简称分子磁矩)在外磁场作用下产生取向一致的排列，排列后的分子电流要在磁介质中产生宏观磁场，从而改变原来的磁场分布。因此，磁化的磁介质中的磁场应由外磁场和由分子电流产生的磁场叠加而成。下面通过等效磁偶极子的概念来讨论分子电流产生的磁场。

磁介质磁化后，单位体积中分子电流磁矩的矢量和称为磁化强度，记为$\boldsymbol{M}$，其表达式为

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \tag{3.135}$$

式中，$\boldsymbol{m}_i$ 是第 i 个分子电流的磁矩。若 $\boldsymbol{M} \neq 0$，则表明磁介质已被磁化。在磁化的磁介质的体积 V' 中取一体积元 dV'，由式(3.135)可知，dV' 内的磁化强度为$\boldsymbol{M}\,dV'$，将它代入式(3.133)可得 dV' 内分子电流(磁偶极子)在任一点处产生的矢量磁位为

$$d\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_R}{R^2} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dV'$$

这样，体积 V' 内所有磁偶极子在其外部一点产生的矢量磁位为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \boldsymbol{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dV' \tag{3.136}$$

在上式中应用矢量恒等式，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_n}{R} dS' \end{aligned} \tag{3.137}$$

式中，S'是包围体积 V'的封闭曲面，$\boldsymbol{a}_n$ 是 S'的外法向单位矢量。可证明，上式也是磁介质内部任一点处矢量磁位的计算式。

将式(3.137)中的体积分和面积分分别与式(3.119)、(3.120a)比较，可见 $\nabla' \times \boldsymbol{M}$ 相当于一个体电流密度，称为束缚体电流密度(或磁化体电流密度)，用$\boldsymbol{J}_b$ 表示；$\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_n$ 相当于一个面电流密度，称为束缚面电流密度(磁化面电流密度)，用$\boldsymbol{J}_{bS}$表示，即

$$\boldsymbol{J}_b = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{3.138}$$

$$\boldsymbol{J}_{bS} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_n \tag{3.139}$$

式(3.138)中略去了∇上的一撇,因磁化强度总是对源点而言,略去∇上一撇不致引起混淆。式(3.137)表明,磁化介质内部的束缚体电流密度和它表面上的束缚面电流密度是确定磁化介质体产生的矢量磁位的源。

如前所述,磁化介质中的磁场应由传导电流产生的磁场和束缚电流(磁化电流)产生的磁场的叠加,此时适用于磁介质的安培环路定律的微分形式应变为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_b)$$

将式(3.138)代入,得

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right) = \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{3.140}$$

式中,$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M}$,称为磁场强度。上式是磁介质中安培环路定律的微分形式,它表明,磁化介质中任一点处磁场强度的旋度等于该点处的传导电流密度。可见,磁场强度$\boldsymbol{H}$的旋涡源是传导电流密度,而磁感应强度$\boldsymbol{B}$的旋涡源是传导电流密度和束缚电流密度。

将式(3.140)两边取面积分,并应用斯托克斯定理,得

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{3.141}$$

这就是磁介质中安培环路定律的积分形式。

由式(3.140)可知

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{3.142}$$

此式适用于任何线性或非线性媒质。我们知道,媒质可依其磁的特性分为三类:顺磁介质(如铝、纯铁(99.95%)、液态氧等)、抗磁介质(如铅、铜、水、空气等)以及铁磁介质(如坡莫合金、铁(99.91%)等)。实验证明,除铁磁介质外,在线性、各向同性媒质中,$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 成正比,即

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{3.143}$$

式中,χ_m 称为媒质的磁化率,是一个无量纲的标量或常数,它取决于媒质的物理、化学性质。对顺磁和抗磁介质(统称为非磁性媒质)其 $\chi_m > 0$ 和 $\chi_m < 0$,而在真空或自由空间中 $\chi_m = 0$。将上述关系代入式(3.142),有

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{3.144}$$

式中,$\mu_r = 1 + \chi_m$,称为媒质的相对导磁率,它也是一个无量纲的标量或常数。真空中,$\mu_r = 1$;顺磁介质,$\mu_r > 1$;抗磁介质,$\mu_r < 1$。对于简单媒质,χ_m 和 μ_r 均是常数,且满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$;对非磁性媒质,因其 μ_r 接近于 1,故通常假定 $\mu_r = 1$;对铁磁介质,μ_r 可达数千或更高;对各向异性媒质,式(3.143)不再适用,此时 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 不再具有相同方向,相对导磁率也不再是标量,而是张量。

3.3.4 静磁场的边界条件

磁场经过两种媒质分界面时，**B**，**H** 等场量会发生变化。根据第 2 章中推导两种不同媒质交界面处边界条件的思路，容易导出静磁场的边界条件。

1）**B** 和 **H** 的边界条件

对磁感应强度 **B**，有

$$\boldsymbol{a}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \quad 或 \quad B_{1n} = B_{2n} \tag{3.145}$$

这表明在两种磁介质的分界面上，尽管磁感应强度的法向分量连续，但因 $\mu_1 \neq \mu_2$，从而 $H_{1n} \neq H_{2n}$，故磁场强度的法向分量不连续。

对磁场强度 **H**，有

$$\boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S \quad 或 \quad H_{1t} - H_{2t} = J_S \tag{3.146a}$$

若 $\boldsymbol{J}_S = 0$，则有

$$\boldsymbol{a}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = 0 \quad 或 \quad H_{1t} = H_{2t} \tag{3.146b}$$

这表明，在两种不同媒质分界面上，磁场强度的切向分量不连续，其差值等于面电流密度的大小，而当 $\boldsymbol{J}_S = 0$ 时，磁场强度的切向分量连续。

应指出，当两种媒质是顺磁介质或抗磁介质时，因为这两类介质的 $\mu \approx \mu_0$，分界面上磁场方向改变很小，故可忽略磁场方向的改变。例如在水和玻璃的分界面的两侧磁场连续，即 $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$。但在铁磁介质和非磁性媒质的分界面上，因前者的 μ 比后者大得多，故非磁性媒质中磁场强度的方向几乎与分界面垂直。

2）**A** 的边界条件

对矢量磁位 **A**，可由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 以及 **B** 和 **H** 的边界条件导出，即

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_n \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}_1 - \nabla \times \boldsymbol{A}_2) = 0 \\ &\boldsymbol{a}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1}\nabla \times \boldsymbol{A}_1 - \frac{1}{\mu_2}\nabla \times \boldsymbol{A}_2\right) = \boldsymbol{J}_S \end{aligned}\right\} \tag{3.147}$$

例 3.9 一半径为 a，通有电流为 I 的无限长的直导线，其下部分垂直埋入导磁率为 μ 的均匀磁介质中，如图 3.17 所示。求在空气和磁介质的两个区域中磁感应强度和磁场强度以及各分界面处的束缚面电流密度。

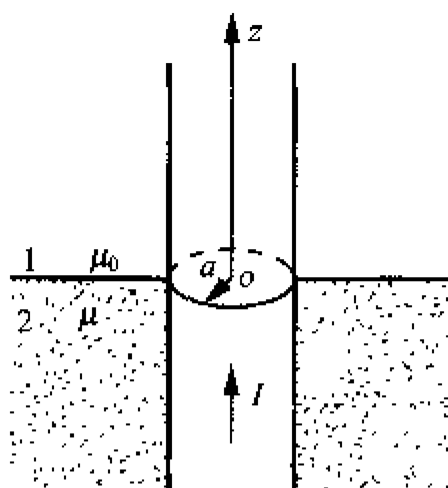


图 3.17 垂直埋入磁介质中的长直导线

解：在空气中，根据安培环路定律：

$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$，有 $\boldsymbol{H}_1 = \left(\dfrac{I}{2\pi r}\right)\boldsymbol{a}_\varphi$，则

$$\boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在磁介质中，有 $\boldsymbol{H}_2 = \left(\dfrac{I}{2\pi r}\right)\boldsymbol{a}_\varphi$，则

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu I}{2\pi r}$$

于是，磁介质中的磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} - \boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1)\boldsymbol{a}_\varphi$$

这样，在导线和磁介质的分界面上，束缚面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{bS} = (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_n)\big|_{r=a} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1) \times (-\boldsymbol{a}_r)\big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a}(\mu_r - 1)\boldsymbol{a}_z$$

而在空气和磁介质的分界面上，有

$$\boldsymbol{J}_{bS} = (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_n)\big|_{z=0} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1) \times \boldsymbol{a}_z = \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1)\boldsymbol{a}_r$$

3.3.5 电感

在恒定电流产生的静磁场中，穿过导体系统的磁链与产生该磁链的电流之比即为导体系统的电感，因此电感有自感和互感之分。

1）自感

假设系统中的导体回路由 N 匝导线绕成，其磁链即为各匝导线回路的磁通量之和。若各匝导线密绕，则可认为与每一匝导线回路交链的磁通量相同，这样可近似认为磁链 $\Psi = N\Phi$，或

$$\Psi = N\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.148}$$

式中，匝数 N 可小于 1。

假设导体回路存在的空间中不存在铁磁材料，即空间中填充线性媒质，此时磁通量密度与产生它的电流成正比，因面与导线回路交链的磁链也与电流成正比，当静磁场由导线回路中的电流产生时，穿过回路的磁链与电流之比即为自感，记为 L，即

$$L = \frac{\Psi}{I} \tag{3.149}$$

式中，L 称为回路的自感系数，简称为自感，单位为 H。L 的大小决定于回路的尺寸和形状，还与媒质的导磁率有关，但与电流无关。

由于导线的截面积一般为有限值，因此磁链可同时穿过导线外部和导线内部。穿过导线外部的磁链称为外磁链，用 Ψ_o 表示，它对应的自感称为外自感，用 L_o 表示；穿过导线内部的磁链称为内磁链，用 Ψ_i 表示，它对应的自感称为内自感，用 L_i 表示，即

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_o}{I} + \frac{\Psi_i}{I} = L_o + L_i \tag{3.150}$$

计算内磁链时，与内磁通元 $\mathrm{d}\Phi_i$ 相交链的电流只是部分电流，因此相应的匝数 N 应为小于 1 的分数匝数。分数匝数等于内磁通元 $\mathrm{d}\Phi_i$ 交链的那部分电流 I_i 与全部电流 I 之比。于是内磁链元 $\mathrm{d}\Psi_i = \frac{I_i}{I}\mathrm{d}\Phi_i$，而内磁链为

$$\Psi_i = \int_s \frac{I_i}{I} d\Phi_i \tag{3.151}$$

这样，利用上式可求得 Ψ_i，从而可得内自感 L_i。

例 3.10 求半径为 a 的无限长直导线（导磁率为 μ_0）的单位长度内自感。

解：选取圆柱坐标系如图 3.18 所示，设电流 I 沿 z 方向流动。由安培环路定律可得导线内部距导线轴线为 r 处的磁通量密度为

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\varphi \tag{3.152}$$

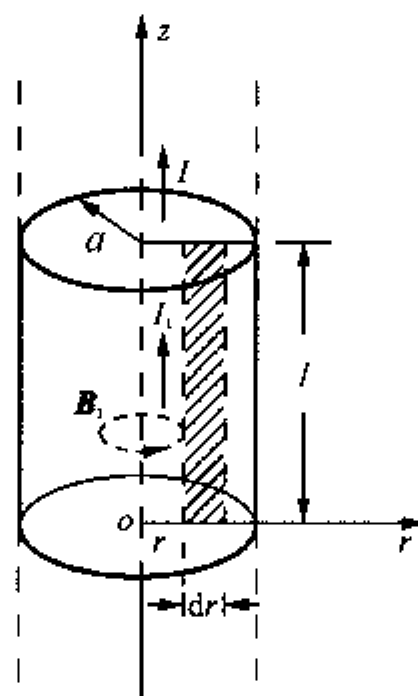


图 3.18 一段长直导线

导线内部的磁力线是以轴线为中心的同心圆，若取无限长直导线的一段长度为 l，则在长为 l 的范围内，穿过 r 处宽为 dr 的矩形截面的内磁通元为 $d\Phi_i = B_i dS = B_i l dr$，而以 r 为半径的圆柱面包围的电流 $I_i = I\pi r^2/\pi a^2 = r^2 I/a^2$。于是，内磁链元 $d\Psi_i$ 为

$$d\Psi_i = \frac{I_i}{I}d\Phi_i = \frac{\mu_0 r^3 lI}{2\pi a^4}dr \tag{3.153}$$

故长度为 l 的导线纵截面上的内磁链为

$$\Psi_i = \int_S d\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 r^3 lI}{2\pi a^4}dr = \frac{\mu_0 Il}{8\pi} \tag{3.154}$$

所以，长直导线单位长度的内自感 L_{iu} 为

$$L_{iu} = \frac{\Psi_i}{Il} = \frac{\mu_0}{8\pi} \tag{3.155}$$

此式可认为是单匝线圈构成的导线回路的单位长度的内自感，因为导线回路尺寸一般比导线横截面的尺寸大得多，载流导线回路的内部磁场可近似认为与无限长载流直导线内部的磁场相同。

2）互感

设线性媒质（导磁率为 μ_0）中有两个彼此靠近的线圈，如图 3.19 所示，当第 1 个线圈中通有电流 I_1 时，此电流产生的磁力线除了穿过自身线圈外，还有一部分与线圈 2 相交链。由线圈 1 中的电流 I_1 所产生的而与线圈 2 相交链的磁链，称为互感磁链，记为 Ψ_{21}。于是，定义线圈 1 对线圈 2 的互感（或称互感系数）L_{21} 为

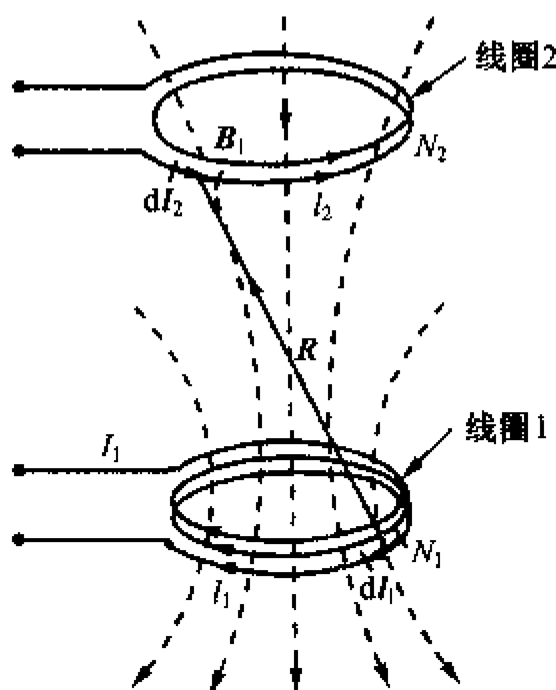


图 3.19 两个彼此靠近的线圈中的磁力线分布

$$L_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_1} \tag{3.156a}$$

同样，线圈2对线圈1的互感L_{12}为

$$L_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}=L_{21}=M \tag{3.156b}$$

若线圈1中通有电流I_1，线圈2开路，如图3.19所示。穿过线圈2的总磁链可表示为

$$\Psi_{21}=N_2\int_{S_2}\boldsymbol{B}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=N_2\int_{S_2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=N_2\oint_{l_2}\boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \tag{3.157}$$

式中，$\boldsymbol{B}_1$为线圈1中的电流I_1在线圈2中产生的磁通量密度。由于线圈1的电流在线圈2中任意点产生的矢量磁位$\boldsymbol{A}_1$为

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R} \tag{3.158}$$

将上式代入式(3.157)，得

$$\Psi_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R}$$

因此，由线圈1中的电流在线圈2中引起的互感为

$$L_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R} \tag{3.159}$$

类似可得L_{12}的表达式，它同式(3.159)完全相同，即$L_{12}=L_{21}=M$。式(3.159)称为计算互感的纽曼(Neumann)公式。由此式可见，互感的大小与两导线回路的尺寸、形状、相对位置及周围填充媒质的特性有关，而与回路中的电流无关。应指出，由于式(3.159)是二重积分的表达式，计算任意两个线圈间的互感一般较为复杂，所以直接利用式(3.156)求解互感通常更简单。

对于由N个载流导线回路构成的线性系统的互感求解问题，也可类似进行分析，这里不再赘述。

3.3.6 静磁场的能量、能量密度及磁场力

1) 静磁场的能量与能量密度

电流回路在静磁场中要受到作用力，说明静磁场中储存着能量。静磁场储能的建立需要时间，其过程是以电源与回路接通开始一直到回路中的电流达到稳定值为止。先考虑自感为L的单个N匝线圈中的储能。设此线圈在$t=0$时刻与电源相连接，$t=0$时线圈中电流为零，然后电流i将从零逐渐增加到稳定值I。当线圈中的电流i增加时，在线圈的两端就感应出电动势$\mathscr{E}=-N\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，它将阻止线圈中电流$i$的增加。为了维持线圈中电流$i$持续增加，电源必须供给线圈能量，在时间$\mathrm{d}t$内做功为

$$\mathrm{d}W_m=-\mathscr{E}i\mathrm{d}t=iN\mathrm{d}\Phi \tag{3.160}$$

式中，负号表示当电流 i 增加时，电源供给线圈能量或线圈储能。于是，由上式可得电源做的总功 $W_m = N\int i d\Phi$。对线性系统，因 $Nd\Phi = Ldi$ 以及 $N\Phi = LI$，从而有

$$W_m = \int_0^I L i_1 di_1 = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}IN\Phi = \frac{1}{2}I\Psi \tag{3.161}$$

这个功应以磁场能量的形式储存起来。这表明，若电感为 L 的单匝线圈中通有电流 I 时，此线圈中的储能为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{3.162}$$

再考虑如图 3.19 所示的两个耦合线圈中的储能。若设 Φ_1 为通有电流 I_1 的线圈 1 中的总磁通量，则 $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$，式中 Φ_{11} 为线圈 2 中无电流时，由线圈 1 所产生的磁通量，Φ_{12} 为线圈 1 中无电流时，由线圈 2 中的电流 I_2 产生与线圈 1 交链的磁通量。同样，与线圈 2 交链的总磁通量为 $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$。于是，按式(3.161)可得线性系统中储存的总能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}N_1\Phi_1 I_1 + \frac{1}{2}N_2\Phi_2 I_2 = \frac{1}{2}I_1\Psi_1 + \frac{1}{2}I_2\Psi_2 \\ &= \frac{1}{2}N_1\Phi_{11}I_1 + \frac{1}{2}N_1\Phi_{12}I_2 + \frac{1}{2}N_2\Phi_{22}I_2 + \frac{1}{2}N_2\Phi_{21}I_1 \\ &= \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + \frac{1}{2}L_{21}I_1I_2 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \end{aligned} \tag{3.163}$$

一般地，若线性媒质填充的空间中有 n 个载流回路，则此线性系统的磁场能量可由式(3.163)推广得到，即

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Psi_i \tag{3.164}$$

同静电场情况类似，利用式(3.164)可导出用磁场的体积分表示的磁场储能的计算式。这里不作具体推导，只提供同静电场中类似的磁场能量的表达式，即

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}dV \tag{3.165}$$

式中，$w_m = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}/2$，称为磁场能量密度。

对简单媒质，

$$w_m = \mu H^2/2。 \tag{3.166}$$

例 3.11 求如图 3.20 所示的长为 l，内外导体的内外半径分别为 a，b 及 c，d 的同轴线的自感。

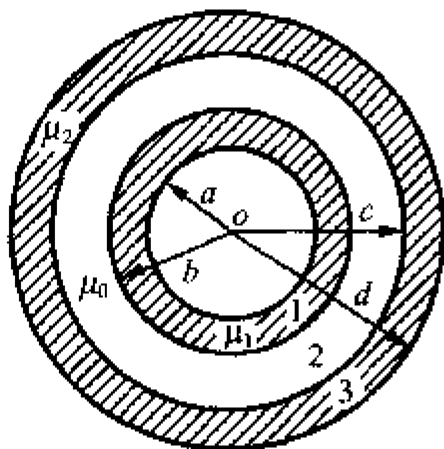


图 3.20 同轴线的横截面

解：设同轴线内外导体中通有大小相等、方向相反的电流 I，并选用圆柱坐标系。采用求解各区域对应内外自感的方法求解总的自感。

① 求内导体的内自感 L_{i1}

在 $a \leqslant r \leqslant b$ 区域(区域 1)中,由安培环路定律,可得

$$\boldsymbol{B}_{i1} = \frac{\mu_1 I_{i1}}{2\pi r}\boldsymbol{a}_\varphi \tag{3.167}$$

于是,长度为 l 的内导体纵截面上的磁链元 $\mathrm{d}\Psi_{i1}$ 为

$$\mathrm{d}\Psi_{i1} = \frac{I_{i1}}{I}B_{i1}l\mathrm{d}r = \frac{\mu_1 l\mathrm{d}r}{2\pi r}\frac{I_{i1}^2}{I} = \frac{\mu_1 lI\mathrm{d}r}{2\pi r}\frac{(r^2-a^2)^2}{(b^2-a^2)^2} \tag{3.168}$$

所以,区域 1 对应的内自感 L_{i1} 为

$$\begin{aligned} L_{i1} &= \frac{1}{I}\int \mathrm{d}\Psi_{i1} = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\mu_1 l}{r}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\right)^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{\mu_1 l}{2\pi}\left(\frac{1}{b^2-a^2}\right)^2\left(\frac{b^4-a^4}{4} - a^2b^2 + a^4 + a^4\ln\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \tag{3.169}$$

② 求内外导体间的外自感 L_o

在 $b \leqslant r \leqslant c$ 区域(区域 2)中,由安培环路定律,得

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{a}_\varphi \tag{3.170}$$

于是,外自感 L_o 为

$$L_o = \frac{1}{I}\int_b^c \frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{c}{b} \tag{3.171}$$

③ 求外导线的内自感 L_{i2}

在 $c \leqslant r \leqslant d$ 区域(区域 3)中,由安培环路定律,得

$$\boldsymbol{B}_{i2} = \frac{\mu_2 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2-c^2}{d^2-c^2}\right)\boldsymbol{a}_\varphi = \frac{\mu_2 I}{2\pi r}\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right)\boldsymbol{a}_\varphi \tag{3.172}$$

于是,外导体的内自感 L_{i2} 为

$$\begin{aligned} L_{i2} &= \int \frac{I_{i2}}{I}\mathrm{d}\Phi_{i2} = \frac{1}{I}\int_c^d \frac{\mu_2 Il}{2\pi r}\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right)^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{\mu_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{d^2-c^2}\right)^2\left(\frac{d^4-c^4}{4} - c^2d^2 + c^4 + c^4\ln\frac{d}{c}\right) \end{aligned} \tag{3.173}$$

所以,该同轴线的总自感为

$$\begin{aligned} L = L_o + L_{i1} + L_{i2} = &\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{c}{b} + \frac{\mu_1 l}{2\pi}\frac{1}{(b^2-a^2)^2}\left[\frac{1}{4}(b^4-a^4) - a^2b^2 + a^4 + a^4\ln\frac{b}{a}\right] + \\ &\frac{\mu_2 l}{2\pi}\frac{1}{(d^2-c^2)^2}\left[\frac{1}{4}(d^4-c^4) - c^2d^2 + c^4 + c^4\ln\frac{d}{c}\right] \end{aligned} \tag{3.174}$$

此题也可按式(3.162)通过求解磁场总储能的思路求自感。

2) 用虚位移法求磁场力

载流导线回路或磁铁在外磁场中要受到磁场的作用力,除了可以应用安培环路定律和

洛仑兹力公式计算磁场力外，磁场对载流回路和磁铁的作用力，同样可采用虚位移法求得。应用虚位移法求解磁场力有以下两种情况。

(1) 磁通量不变

假设某导线回路或系统中的填充媒质在虚位移过程中所有回路所交链的磁通量保持不变，此时外源对系统所做的虚功等于零。因此，磁场力所做的虚功应等于磁场能量的减少量，由此可推得

$$F_l = -\frac{\partial W_m}{\partial l}\bigg|_{\Phi=\text{const.}} \quad 或 \quad \boldsymbol{F}_\Phi = -\nabla W_m \tag{3.175}$$

(2) 回路电流不变

假设某导线回路或系统中的填充媒质在虚位移过程中所有载流回路中各点的电流密度保持不变，即外源对系统所做的虚功不等于零。因此，虚位移过程中磁场力所做的机械功一定等于系统内所储存的磁场能量的增加量。由此可推得

$$F_l = \frac{\partial W_m}{\partial l}\bigg|_{I=\text{const.}} \quad 或 \quad \boldsymbol{F}_I = \nabla W_m \tag{3.176a}$$

特别地，对两个导线回路的系统，上式可表示为

$$F_l = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial l}\bigg|_{I_1,\,I_2=\text{const.}} \quad 或 \quad \boldsymbol{F}_I = I_1 I_2 (\nabla L_{12}) \tag{3.176b}$$

例 3.12 图 3.21 所示的一 U 形电磁铁，其中通过 N 匝线圈的电流 I 在磁路中产生磁通为 Φ_1，铁芯的截面积为 S。求衔铁受到的磁场力。

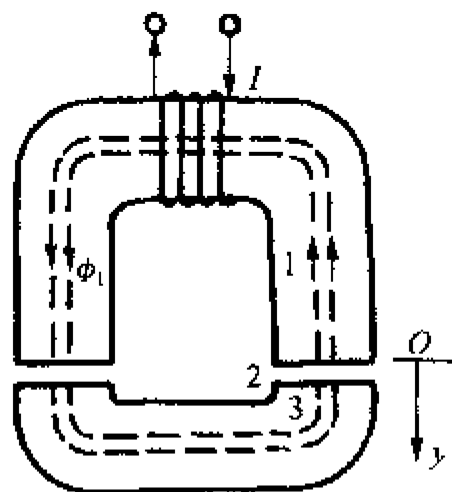


图 3.21 U 形电磁铁

解：因电磁铁、空气隙和衔铁中的磁通量 Φ 相同，故可用 $\Phi=\text{const.}$ 的对应公式求解。

设电磁铁两截面与衔铁间的距离为 y，其正向如图 3.21 所示。由于系统中总的磁场储能 $W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3}$，其中 W_{m1}，W_{m2}，W_{m3} 分别为 U 形电磁铁、空气隙和衔铁中的磁场能量。显然，W_{m1}，W_{m3} 为恒定值，与衔铁受到的磁场力无关。因此，可只求空气隙中的磁场能量（即系统中磁场能量的变化部分），即

$$W_{m2} = \int_V w_{m2}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \mathrm{d}V = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V = \int_0^y \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S^2} S\,\mathrm{d}y = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S} y$$

则衔铁受到的磁场力为

$$F_{\Phi y} = -2\frac{\partial W_{m2}}{\partial y}\bigg|_{\Phi=\text{const.}} = -\frac{\Phi_1^2}{\mu_0 S}$$

或

$$\boldsymbol{F}_\Phi = -\frac{\Phi_1^2}{\mu_0 S}\boldsymbol{a}_y$$

式中，负号表明衔铁受到的磁场力是吸力。

习　题

3-1　已知半径为 a，体电荷密度 $\rho=\rho_0\left[1-\left(\frac{R^2}{a^2}\right)\right]$ 的带电体被一内半径为 $b(b>a)$、外半径为 c 的同心导体球壳所包围。求空间各点处的电场强度和电位。

3-2　已知一静止点电荷 Q 位于圆柱坐标系中的点 $p_0\left(a,\frac{\pi}{3},-a\right)$ 处。

求：① 此点电荷在直角坐标系中点 $p(a,a,a)$ 处产生的电场强度；

② 点 p 处的电场强度在球坐标系中的表达式。

3-3　一介电常数为 ε 的无限大介质外加均匀电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{a}_zE_0$，介质中有一半径为 a 的球形空腔。求空腔内外的电场强度和空腔表面的束缚面电荷密度。

3-4　在面积为 $a\times b$ 的两平行电极间填充两种无耗介质，介质层的分界面与极板平行，介质层的厚度和介电常数分别为 d_1，d_2 和 ε_1，ε_2，两极板间加电压为 U_0，如图 3.22 所示。

① 导出两种介质中电场强度的表达式；

② 导出介质分界面上的束缚面电荷密度的表达式；

③ 求两种介质分界面上单位面积所受到的电场力的表达式。

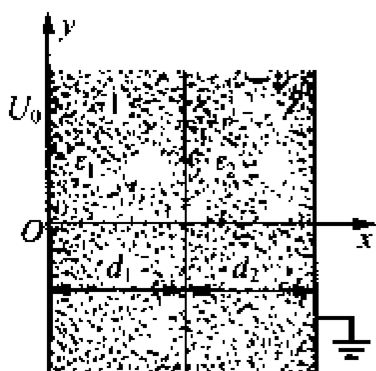


图 3.22　题 3-4 附图

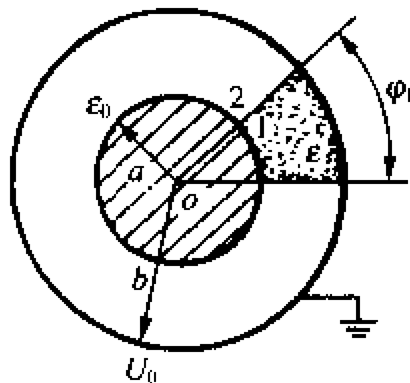


图 3.23　题 3-5 附图

3-5　如图 3.23 所示的无限长同轴圆柱的内、外导体半径分别为 a 和 b，两导体间 $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$ 内填充介电常数为 ε 的理想介质，内外导体间的电压为 U_0。

求：① 内、外导体间的电场强度和电通量密度；

② 导体表面上单位长度的带电量 q_l。

3-6　已知球形电容器的内导体半径为 R_1，外导体内半径为 R_2，其间区域 1（介质 1）和区域 2（介质 2）中分别填充介电常数为 ε_1 和 ε_2 的均匀介质，如图 3.24 所示。设内球壳带电荷为 Q，外球壳接地。

求：① 两球壳间的电场强度和电位的表达式；

② 两球壳间束缚体电荷密度以及各介质表面上的束缚面电荷密度的表达式；

③ 各导体表面上的自由面电荷密度的表达式。

3-7　如图 3.25 所示，两无限大平行导体平板间距为 b，上板电位 $V=V_0$，下板电位为零，其间有一块与上板垂直连接的无限长直导体平面薄片，宽度为 $(b-d)$，电位 $V=V_0$，

求两平行导体板间的电位分布。

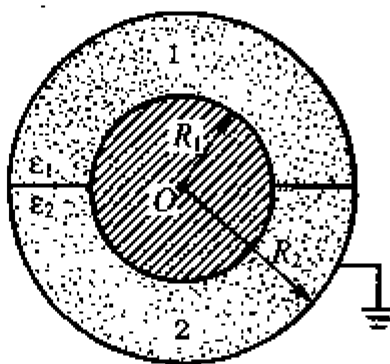


图 3.24　题 3-6 附图

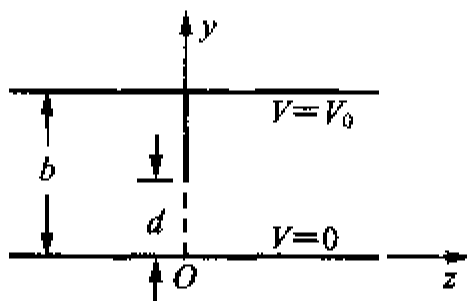


图 3.25　题 3-7 附图

3-8　一矩形导体槽由两部分构成，如图 3.26 所示。两平行导体板的电位分别为 V_0 和零。求导体槽内的电位分布。

3-9　如图 3.27 所示，在 $y=0$ 和 $y=b$ 处放置两块无限大的平行接地导体板，在 $x=0$ 处放置一块与平行导体板相绝缘的垂直导体板，其电位为 V_0。求三块导体板间的电位分布。

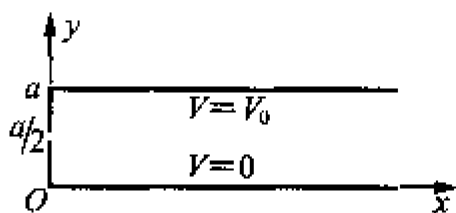


图 3.26　题 3-8 附图

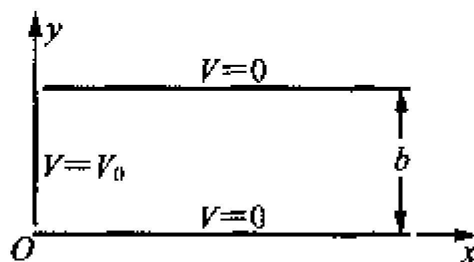
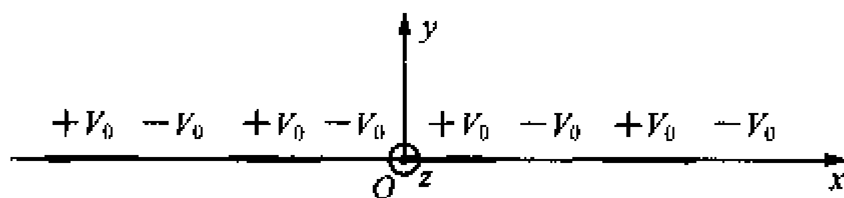
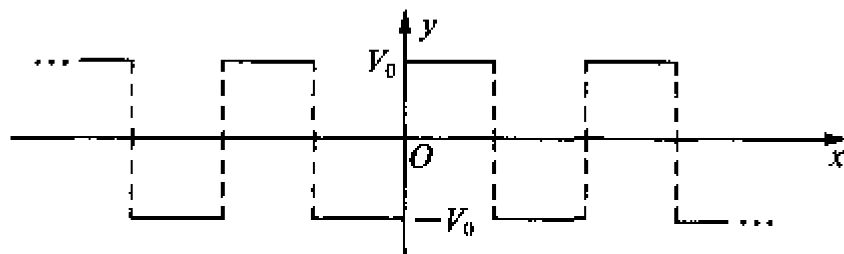


图 3.27　题 3-9 附图

3-10　设直角坐标系的 xOz 平面上的电位由 x 方向上电压波决定，如图 3.28 所示，电位与 z 无关。求空间中任一点处的电位分布。



(a)



(b)

图 3.28　题 3-10 附图

3-11　两尺寸相同，面积很大的正方形导体板构成一非平行的空气电容器，两导体板间的夹角为 α，如图 3.29 所示。忽略边缘效应。

求：① 当两极板上分别带有大小为 Q 的异号电荷时，该电容器内的电位、电场强度以及极板上的面电荷密度；

② 当两极板间加有电压 U_0 时，该电容器内的电位、电场强度以及极板上的面电荷密度；

③ 电容器的电容。

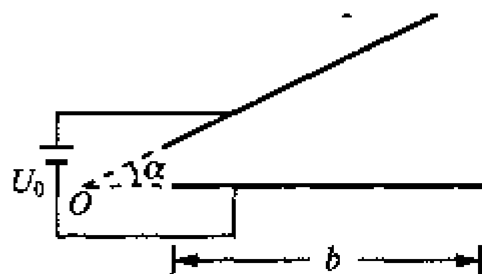


图 3.29 题 3-11 附图

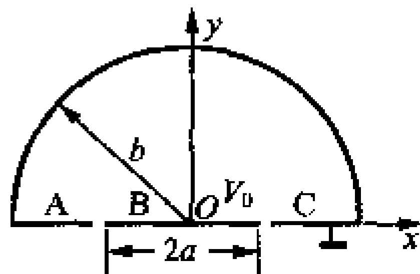


图 3.30 题 3-12 附图

3-12 如图 3.30 所示，一半径为 b 的无限长导体半圆柱面内，在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 的平面上放有三块导体片 A，B，C。B 片宽为 $2a$，中心线与圆柱面的轴线重合。A 和 C 片的宽均为 $(b-a)$（但 A，B 及 B，C 之间留有缝隙）。B 片的电位为 V_0，A，C 片和圆柱面的电位均为零。求圆柱面内的电位的表达式。

3-13 自由空间中有一无限大的理想接地导电平面，其上方 h 处有一点电荷 q，电荷处于均匀电场 $\boldsymbol{E}(=E_0\boldsymbol{a}_z)$ 中。

① 若该点电荷受力为零，则 h 为何值？

② 若该点电荷原先置于①所得值的一半处，要使该点电荷向 $z=\infty$ 方向运动，所需的最小初速度为多少？

3-14 真空中有一半径为 R 的金属球壳，已知一带电量为 Q 的点电荷放在距球心距离为 $d(d>R)$ 处，

① 导出金属球壳外任一点处的电场强度和电位的表达式；

② 导出金属球面上各点处的电场强度和电位的表达式，并写出电场强度出现最大值处的电场强度的表达式；

③ 若将金属球壳接地，则情况如何？

3-15 真空中，一半径为 a 的不接地导体球壳内距球心为 $b(b<a)$ 处放一点电荷 Q，求：① 球内外任一点 p_i 及点 p_o 处和球壳上的电位表达式；

② 球壳内点电荷 Q 所受到的电场力。

3-16 一半径为 a 的接地导体球外有一段线电荷密度为 ρ_l 的均匀带电线，已知带电线段与导体球的近端距离球心为 b，带电线长为 l，且带电线处于 z 轴上，如图 3.31 所示。

① 求出镜像电荷的电荷量；

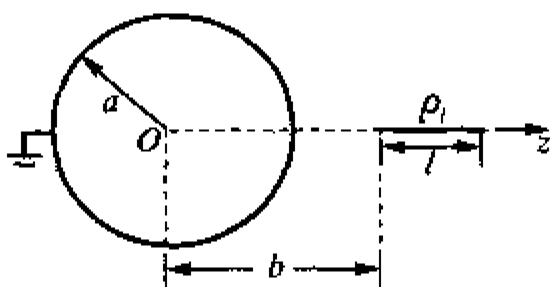


图 3.31 题 3-16 附图

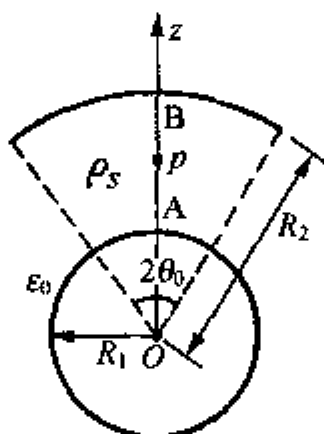


图 3.32 题 3-17 附图

② 导出任一点 p 处的电位表达式；

③ 导出带电线所受的电场力。

3-17 在一半径为 R_1 的接地导体球外有一球心相同、半径为 R_2 的部分导体球壳，此球壳对球心的张角为 $2\theta_0$，如图 3.32 所示。部分球壳上均匀分布面电荷且密度为 ρ_S。

① 导出接地导体球与部分球壳间 z 轴上任一点 $p(R, \theta, \varphi) = p(R, 0°, 0°)$ 处的电位表达式；

② 求出接地导体球上 A 点的面电荷密度 ρ_{SA} 的表达式。

3-18 真空中，一半径为 a 的导体球带有电荷 Q_1，球外有一点电荷 Q_2，距球心的距离为 b。若 Q_1 和 Q_2 均为正电荷，

① 求导体球内外任一点电位的表达式；

② 求点电荷 Q_2 受到的电场力的表达式，并导出使点电荷 Q_2 所受的力为吸力时 Q_1 和 Q_2 间应满足的关系式。

3-19 已知处于下半空间的大地(视为理想导体)与上半空间交于 $z=0$ 平面，上半空间 $(z \geqslant 0)$ 中有一半径 $a = 10\ \text{mm}$ 的圆柱形导线，导线轴线平行于大地平面且两者相距 $h = 10\ \text{m}$。

求：① 圆柱形导线与大地间单位长度的电容；

② 若圆柱形导线与地面间的电压 $U_0 = 100\ \text{V}$，求地面对导线单位长度的作用力。

3-20 同轴线内外导体半径分别为 a 和 b，其间填充介质的电导率为 σ，设内外导体间的电压为 U_0。求此同轴线单位长度的电阻以及功率损耗。

3-21 两种导电媒质交于 $z=0$ 处的平面，媒质 1 $(z \geqslant 0)$ 的电参数为 $\varepsilon_{r1} = 4.6$，$\mu_{r1} = 1$，$\sigma_1 = 30\ \mu\text{S/m}$；媒质 2 $(z \leqslant 0)$ 的电参数为 $\varepsilon_{r2} = 9.2$，$\mu_{r2} = 1$，$\sigma_2 = 60\ \mu\text{S/m}$。已知媒质 2 中的体电流密度 $J_2 = 1\ \text{A/m}$，与分界面法线的夹角为 $\theta_2 = 60°$。

求：① 媒质 1 中的体电流密度 $\boldsymbol{J}_1$ 以及与分界面法线的夹角 θ_1；

② 分界面上的面电荷密度。

3-22 两块电导率分别为 σ_1 和 σ_2，厚度为 h 的金属薄片构成一扇形弧片，如图 3.33 所示。两金属薄片的介电常数均为 ε_0，且已知电极 A，B 的电导率远大于 σ_1 和 σ_2，电极 A，B 间的电压为 U_0。

① 求弧片内任一点的电位；

② 求总电流以及电极 A，B 间的电阻；

③ 在两种媒质分界面 CD 处 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{J}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 的值是否有突变？

④ 求分界面 CD 上的面电荷密度。

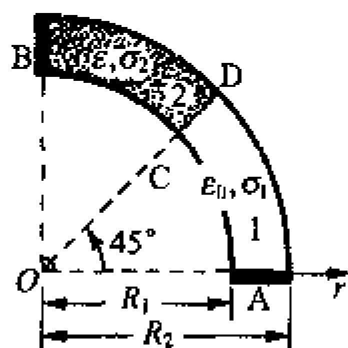


图 3.33 题 3-22 附图

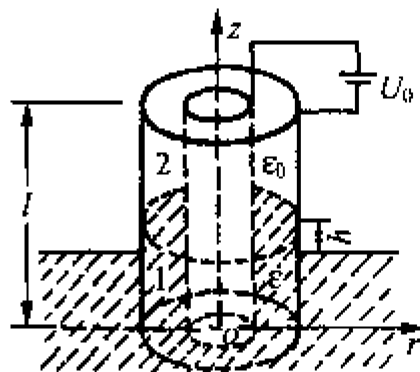


图 3.34 题 3-24 附图

3-23 一球形电容器的内外半径分别为 R_1 和 R_2，其间填充电导率为 σ 的非理想媒质，已知内外导体间的电压为 U_0。

求：① 球形电容器内外导体间的电位和电场强度；

② 此电容器的漏电阻。

3-24 一内、外半径分别为 a，b，长为 l 的同轴空气电容器被垂直地部分浸入介电常数为 ε，比重为 ρ_c 的液体中，如图3.34所示。已知内外导体间施加的电压为 U_0，求液体在电容器内上升的高度 h。(注：电容器外液面高度不随电容器内液体升高而改变，重力加速度为 g)

3-25 自由空间中有一载直流的无限长直导线平行于 y 轴，位于 $x=1\,\text{m}$，$z=-3\,\text{m}$ 处，沿正 y 轴方向流动的电流 $I=0.1\,\text{A}$。求坐标原点处的磁通量密度。

3-26 已知圆柱坐标系中，磁场的磁通量密度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\varphi(1/r)\,\text{T}$，求穿过 $(1\leqslant r\leqslant 3)\,\text{m}$，$(0\leqslant z\leqslant 1)\,\text{m}$ 所限定面积的磁通量。

3-27 已知直角坐标系中，区域 $|z|\leqslant a$ 中存在恒定电流密度 $\boldsymbol{J}=J_0\boldsymbol{a}_y$，求各区域中的磁场强度。

3-28 自由空间中，若两根间距为 $(2c+b)$ 的半无限长的载直流导线在近处弯折成如图3.35所示的形状，求 p 点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的表达式。

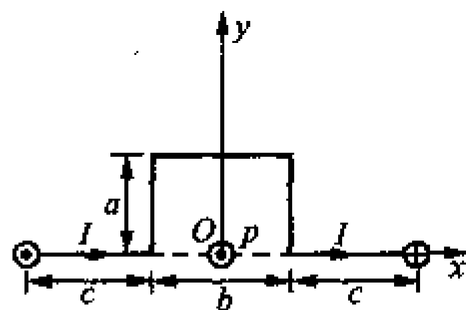


图3.35 题3-28附图

3-29 真空中，载直流为 I 的两根半无限长直导线(垂直于 xOy 平面)和一半径为 a 的有缺口圆环形导线(处于 xOy 平面内)构成回路，若缺口的张角为60°，求环心处的磁感应强度。(注：电流方向任取)

3-30 真空中，间隔为 $2b$，载直流为 I 的两根半无限长弯折成直角的直导线和一半径为 $a(=2b)$，圆心角为 $2\alpha(=240°)$ 的圆弧形导线构成回路，如图3.36所示。求圆弧中心 p 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

3-31 在一半径为 b，电流密度均匀分布的无限长导体圆柱内部有一半径为 a 且轴线与圆柱导体轴线平行的无限长空心圆柱，两者轴线相距为 d，如图3.37所示。设导体圆柱中的电流为 I，且横截面上电流密度均匀分布，求其各部分区域中的磁感应强度。

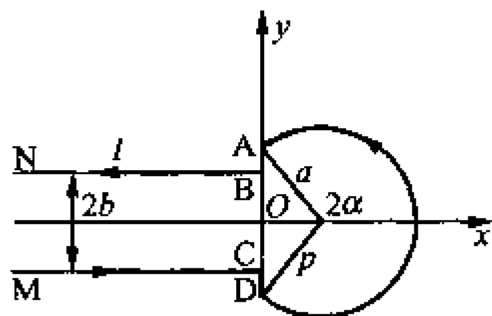


图3.36 题3-30附图

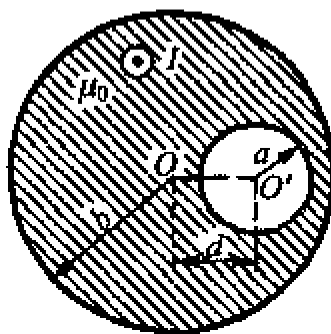


图3.37 题3-31附图

3-32 两种磁介质的交界面位于 $y+z=1\,\text{m}$ 处，已知包含坐标原点的区域1中填充 $\mu_{r1}=2$ 的磁介质，该区域中磁通量密度 $\boldsymbol{B}_1=5\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y\,\text{T}$，又知区域2中填充 $\mu_{r2}=4$ 的磁介质。求区域2中的 $\boldsymbol{B}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$。

3-33 一对长直导线中间放一矩形线圈，它们处于同一平面内，几何尺寸如图3.38所示。

① 求矩形线圈与长直导线间的互感；

② 若长直导线和线圈中分别通有如图所示的电流 I_1 和 I_2，求两载流回路间的相互作用力。

3-34 一同轴线的内导体是半径为 a 的圆柱，外导体是内外导体半径分别为 b 和 c 的圆柱面。内外导体间填充导磁率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种不同的磁介质，如图 3.39 所示。设同轴线中通有电流为 I。

求：① 同轴线中单位长度所储存的磁场能量；

② 单位长度的电感。

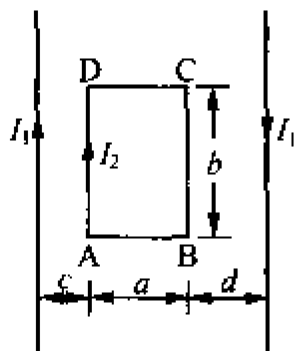


图 3.38　题 3-33 附图

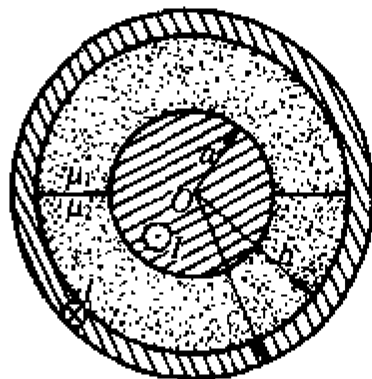


图 3.39　题 3-34 附图

3-35 在一细长导线附近放置一矩形线圈，两者不在同一平面，如图 3.40 所示。求它们间互感的表达式。

3-36 求如图 3.41 所示的长直导线和圆形导线回路间的互感。

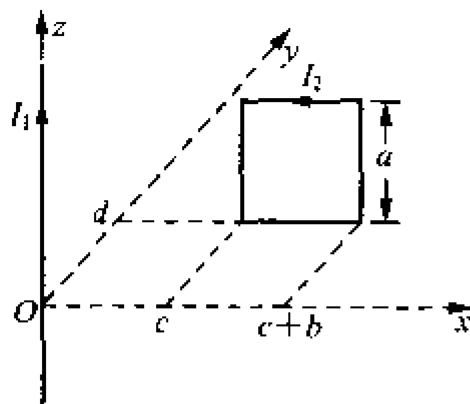


图 3.40　题 3-35 附图

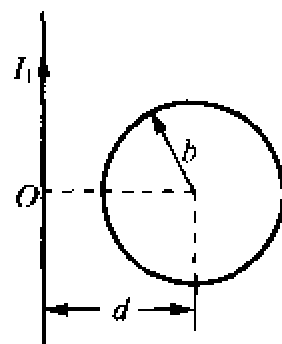


图 3.41　题 3-36 附图

3-37 如图 3.42 所示，导磁率为 μ 的矩形磁介质块部分插入磁路中，该磁路由绕有 N 匝线圈的环形电磁铁构成，其中有一尺寸为 $a\times b\times c$ 的空气隙。试求该磁介质块所受到的磁场力。

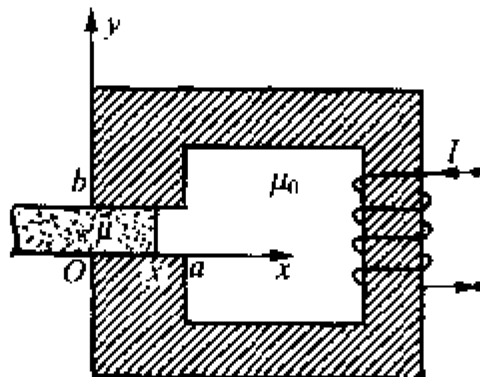


图 3.42　题 3-37 附图

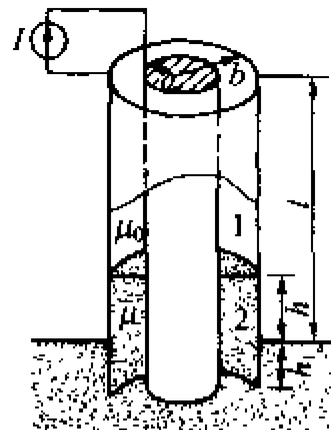


图 3.43　题 3-38 附图

3-38 一内、外半径分别为 a，b 的很长的同轴空气电容器，如图 3.43 所示。内外导体间外加恒定电流源，电流为 I。现将此空气电容器垂直地部分浸入导磁率为 μ，密度为 ρ_m 的可磁化液体中。求液体在电容器内上升的高度 h。（注：电容器外液面高度不随电容器内液体升高而改变，重力加速度为 g）

第 4 章 平面电磁波

在第 2 章中，我们从麦克斯韦方程组出发导出了电场和磁场满足的波动方程，由此推论有电磁波的存在。本章将讨论平面电磁波的传播规律和特点，即从最简单的均匀平面波入手，首先讨论充满理想介质的无界空间中均匀平面波的传播特点和各种传播参数的物理意义；其次讨论充满有耗媒质的无界空间中均匀平面波的传播特点；最后讨论平面波的极化方式以及平面波遇到不同分界面时发生反射和透射的问题。

4.1 理想介质中的平面波

4.1.1 平面波的电磁场

假设电磁波在无界空间充满线性、均匀、各向同性理想介质的无源区域中传播，则电场强度和磁场强度满足的齐次矢量波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1b}$$

对时谐电磁场而言，电场强度和磁场强度复矢量满足以下的齐次矢量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.1c}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.1d}$$

式中，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$。为简单起见，选择电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿直角坐标系的 x 轴方向，即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x E_x$。于是，式(4.1c)化为以下齐次标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \tag{4.2}$$

设 E_x 仅与坐标 z 有关，而与 x，y 无关，则上式简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_x}{\mathrm{d}z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{4.3}$$

此方程是二阶线性齐次常微分方程，其解为

$$E_x = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{+jkz} = E_x^+ + E_x^- \tag{4.4}$$

对应的瞬时值表达式为

$$E_x(t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz) + E_0^- \cos(\omega t + kz) = E_x^+(t) + E_x^-(t) \tag{4.5}$$

式中，第一项的相位随 z 的增加而逐渐滞后，表示向正 z 方向传播的行波，如图 4.1 所示。考察 $\omega t = 0$ 时的波形 $E_0\cos(\omega t - kz)$ 上的 A 点，当 t 从 $\omega t = 0$ 增加到 $\omega t = \pi/2$ 时，只有随 t 的增加 z 也相应增加才能保证相位 $(\omega t - kz)$ 为常数，以使原波形上的 A 点到达虚线波形上的 A 点，即 A 点沿正 z 方向从 z_1 点移动到 z_2 点，而两点处的电场值不变。同样地，式中的第二项的相位随 z 的增加而逐渐超前，表示向负 z 方向传播的行波。因此，第一项为正向行波，第二项为反向行波。若波源发出的波沿正 z 方向传播，则正向行波又称为入射波，而反向行波则称为反射波。在无界空间中传播的波，只有入射波而没有反射波。

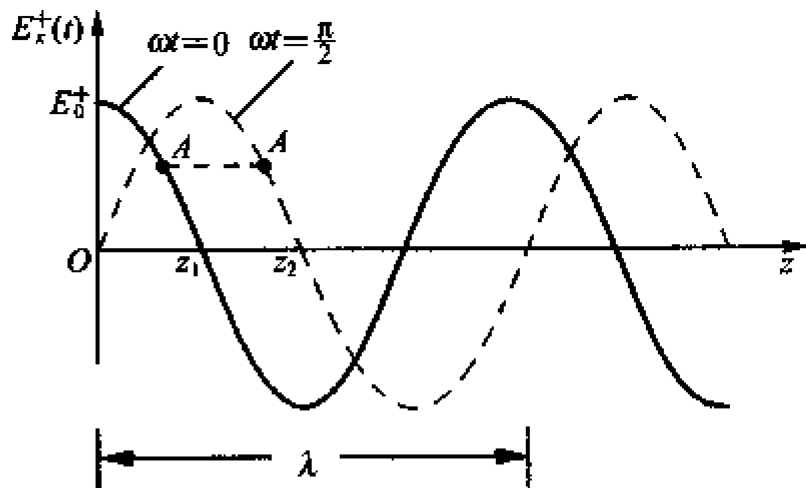


图 4.1　向正 z 方向传播的行波

为定义电磁波的传播参数，设电磁波是无界空间中传播的入射波，此时电场强度复振幅和瞬时值分别为

$$E_x = E_0 e^{-jkz},\ E_x(t) = E_0\cos(\omega t - kz) \tag{4.6}$$

式中，上标"+"已略去；E_0 是 $z=0$ 处电场强度的振幅；ωt 为电磁波的时间相位；kz 为电磁波的空间相位。电磁波的空间相位相同的场点所组成的曲面称为电磁波的等相位面（或称波前、波面），等相位面的法线方向指向电磁波的传播方向（$\boldsymbol{a}_z$）。显然前面讨论的电磁波的等相位面是 $z = \text{const.}$ 的平面，因此称这种电磁波为平面电磁波（简称平面波）。又因为 E_x 与 x，y 无关，即在 $z = \text{const.}$ 的等相位面上各点场强相等，因此这种等相位面上场强均匀分布的平面波又称为均匀平面波（有时也简称为平面波）。均匀平面波是电磁波最基本的形式，例如距离坐标原点处的发射天线很远的地方，由此发射天线辐射的球面波在面积较小的球面上，即可看成是均匀平面波。均匀平面波的传播可看作无数波面一个紧接一个向前运动的结果，波面的运动速度称为相速，记为 v_p。可以考察波面上一个特殊的点（如图 4.1 中的 A 点），这样的点相应于 $\cos(\omega t - kz) = \text{const.}$ 或 $\omega t - kz =$ 恒定的相位值。于是，由此可得 $\omega \mathrm{d}t - k\mathrm{d}z = 0$，故相速为

$$v_p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{4.7}$$

这表明理想媒质中等相位面的传播速度等于该媒质中的光速。

电磁波的空间相位 kz 变化 2π 所经过的距离称为电磁波的波长，用 λ 表示。由 $k\lambda = 2\pi$，得

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{4.8}$$

式中，k 称为电磁波的波数。在理想(电)介质中，电磁波的波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{4.9}$$

式中，λ_0 为真空中电磁波的波长，也称为工作波长。

电磁波的时间相位变化 2π 所经历的时间称为电磁波的周期，用 T 表示；而将一秒钟内电磁波的时间相位变化 2π 的次数称为电磁波的频率，用 f 表示。由于 $\omega T = 2\pi$，因此

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{4.10}$$

这样，电磁波的波数、相速与波长间的关系为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} = \lambda f \tag{4.11}$$

即电磁波的相速等于其波长与频率的乘积。

平面波的磁场强度复振幅可由复数形式的麦克斯韦方程(2.99a)导出，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu(\boldsymbol{a}_x H_x + \boldsymbol{a}_y H_y + \boldsymbol{a}_z H_z)$$

展开得

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu} E_x = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} = H_0 e^{-jkz} \tag{4.12}$$

式中

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.13}$$

称为媒质的本征阻抗。在真空中，η 用 η_0 表示，即 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \approx 377\,\Omega$。可见，在理想介质中，$\eta$ 为一实数，因此 H_y 与 E_x 同相。于是，由式(4.12)可得平面波的磁场的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{a}_y \mathrm{Re}[H_y e^{j\omega t}] = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - kz) \tag{4.14}$$

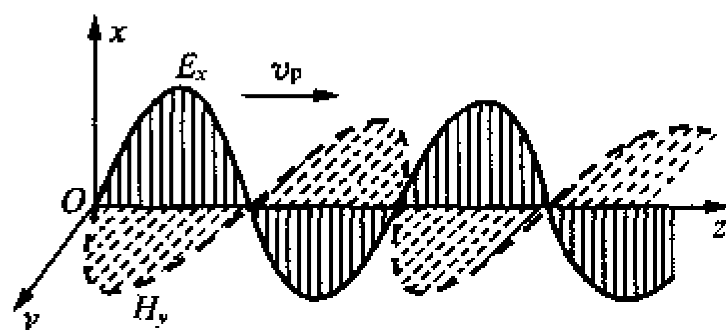
4.1.2 平面波的传播特性

由式(4.6)和式(4.12)可知，理想介质中平面波的电场和磁场的相应分量在时间上同相。于是，可作出理想介质中平面波于某时刻的 H_y 与 E_x 沿 z 轴的变化曲线，如图 4.2(a)所示。$|E_x|$ 和 $|H_y|$ 随 z 的分布图如图 4.2(b)所示。

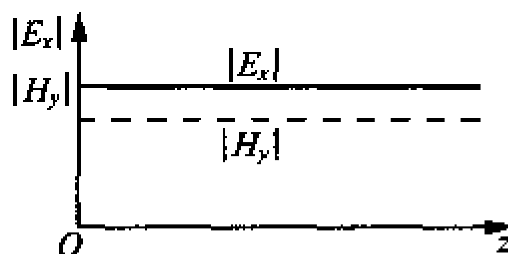
这样，可归纳出理想介质中均匀平面波的基本性质：(1) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直且都垂直于波的传播方向($\boldsymbol{a}_z$)，即无纵向场分量。因此称这种波为横电磁波，记为 TEM 波(或 TEM 模)；(2) $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 处处同相，两者的振幅之比为媒质的本征阻抗，且本征阻抗为实数；(3) 复坡印

亭矢量 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)/2=\boldsymbol{a}_zE_0^2/2\eta=\boldsymbol{S}_{av}$，即均匀平面波沿传播方向传输实功率，且无耗传输；(4) 电场和磁场的平均能量密度相等，即 $(w_e)_{av}=(w_m)_{av}=\varepsilon E_0^2/4=\mu H_0^2/4$，总的平均电磁场能量密度为

$$w_{av}=2(w_e)_{av}=2(w_m)_{av}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2}\mu H_0^2$$



(a) E_x 与 H_y 沿 z 轴的变化曲线



(b) $|E_x|$ 和 $|H_y|$ 随 z 的分布图

图 4.2　理想介质中平面波的场量沿 z 轴的变化曲线

4.1.3　沿任意方向传播的平面波

如前所述，对沿正 z 方向传播的平面波，其电场强度复矢量可表示为

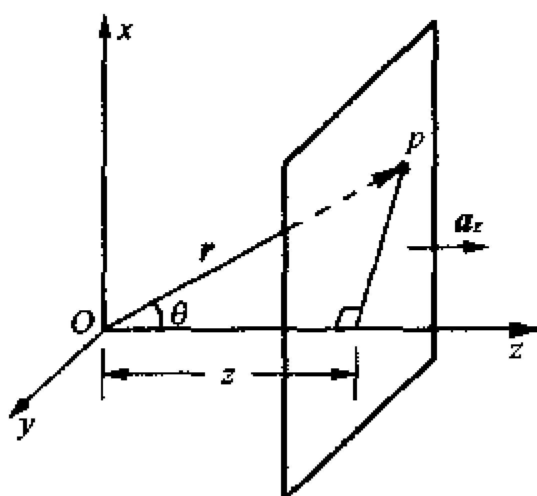
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-jkz} \tag{4.15}$$

式中，$\boldsymbol{E}_0$ 是垂直于 z 轴的常矢量，波的等相位面是 $z=\text{const.}$ 的平面，垂直于 z 轴，如图 4.3(a)所示。设等相位面上任意点 $p(x,y,z)$ 的位置矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_xx+\boldsymbol{a}_yy+\boldsymbol{a}_zz$，对沿正 z 向传播的平面波，它相对于坐标原点的相位为 $-kz=-k\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{r}$。因此任意点 p 处的电场强度复矢量又可表示为

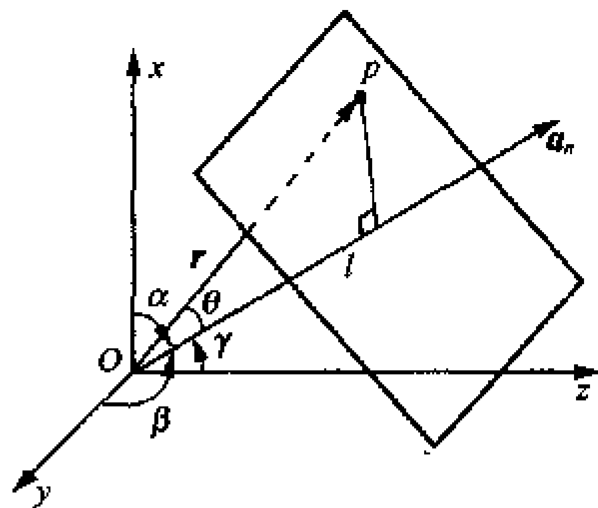
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-jk\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{r}}$$

即 p 点的场矢量仅决定于通过该点，且垂直于 z 轴的平面与坐标原点间的距离。对沿任意矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 方向传播的平面波，如图 4.3(b)所示，此平面波的等相位面垂直于 $\boldsymbol{a}_n$，该等相位面上任意点 p 相对于坐标原点的相位为 $-kl=-k\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{r}$。由于 $\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{r}=r\cos\theta=l$，因此 p 点的电场强度复矢量可表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-jk\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{4.16}$$



(a) 沿 z 向传播的平面波



(b) 沿任意方向传播的平面波

图 4.3　沿 z 向和沿任意方向传播的平面波的坐标关系

式中，$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{a}_n$，称为传播矢量或波矢量。上式表明，$p$ 点的场矢量决定于通过该点，且垂直于矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 的平面与原点间的距离。

设平面波传播方向上的单位矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 与 x，y，z 轴的夹角分别为 α，β 和 γ，则 $\boldsymbol{a}_n$ 可用其方向余弦表示，即

$$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_x\cos\alpha+\boldsymbol{a}_y\cos\beta+\boldsymbol{a}_z\cos\gamma$$

于是，波矢量可表示为

$$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_xk_x+\boldsymbol{a}_yk_y+\boldsymbol{a}_zk_z=\boldsymbol{a}_xk\cos\alpha+\boldsymbol{a}_yk\cos\beta+\boldsymbol{a}_zk\cos\gamma \tag{4.17}$$

式中，k_x，k_y，k_z 分别为 x，y，z 向的波数。显然

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$$

这表明 k_x，k_y，k_z 中只有两个是独立的。这样，沿矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 方向传播的平面波的电场强度复矢量可表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-j(k_xx+k_yy+k_zz)} \tag{4.18}$$

沿矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 方向传播的平面波的磁场强度复矢量可利用无源区域的复数形式麦克斯韦方程组(2.99)导出，此时麦克斯韦方程组可用波矢量 $\boldsymbol{k}$ 表示为

$$\left.\begin{aligned}-j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}&=-j\omega\mu\boldsymbol{H}\\-j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}&=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}&=0\\-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}&=0\end{aligned}\right\}\quad\text{或}\quad\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&=-\eta\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H}\\\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{E}&=0\\\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{H}&=0\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

式中利用了第 2 章中习题 2-15 的结果。由上式的后两个方程可知 $\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{E}_0=0$，以及 $\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{H}_0=0$。这再次表明，无源区域中传播的平面波的场矢量一定垂直于波的传播方向。

于是，磁场强度复矢量为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{\eta}(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E}_0)\mathrm{e}^{-jk\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{\omega\mu} \tag{4.20}$$

这样，沿任意方向传播的平面波的平均功率流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]=\frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E}^*)]\\&=\frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}[(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\boldsymbol{a}_n-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{E}^*]=\boldsymbol{a}_n\frac{E_0^2}{2\eta}=\boldsymbol{a}_nS_{\mathrm{av}}\end{aligned} \tag{4.21}$$

可见，矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向即为功率流的传播方向。

例 4.1 一均匀平面波在空气中传播，其磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=(\sqrt{3}\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\sin(\omega t+Ax-2\sqrt{3}z)\ \mathrm{A/m}$$

求：① 常数 A；② 该平面波的频率、传播方向上的单位矢量；③ 电场强度的复数表达式。

解:① 因 $\boldsymbol{H}=-j(\sqrt{3}\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-j(2\sqrt{3}z-Ax)}$,故 $\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{a}_xA+\boldsymbol{a}_z2\sqrt{3}$。又因 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0$,有

$$(-A\boldsymbol{a}_x+2\sqrt{3}\boldsymbol{a}_z)\cdot(\sqrt{3}\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)=0$$
$$A=2$$

② 因为 $k=\sqrt{k_x^2+k_z^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$,所以

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{m}$$
$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{\pi/2}=1.91\times10^8\ \mathrm{Hz}$$

又因为 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{k}/k$,则

$$\boldsymbol{a}_n=\frac{-2\boldsymbol{a}_x+2\sqrt{3}\boldsymbol{a}_z}{4}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}_z$$

③ 由 $\boldsymbol{E}=-\eta_0(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H})$,得

$$\boldsymbol{E}=-377\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}_z\right)\times(\sqrt{3}\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-j\left(2\sqrt{3}z-2x+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=-188.5(\sqrt{3}\boldsymbol{a}_x+4\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-j\left(2\sqrt{3}z-2x+\frac{\pi}{2}\right)}\ \mathrm{V/m}$$

4.2 导电媒质中的平面波

4.2.1 导电媒质的分类

导电媒质又称为有(损)耗媒质,是指 $\sigma\neq0$ 的简单媒质。当时谐电磁波在无源的导电媒质中传播时,因媒质中出现传导电流 $\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E}$,此时复矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的亥姆霍兹方程(2.101)变为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=(j\omega\mu\sigma-k^2)\boldsymbol{E}=-\omega^2\mu\varepsilon\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\boldsymbol{E}=-\omega^2\mu\varepsilon_{ec}\boldsymbol{E}\tag{4.22a}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}=(j\omega\mu\sigma-k^2)\boldsymbol{H}=-\omega^2\mu\varepsilon\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\boldsymbol{H}=-\omega^2\mu\varepsilon_{ec}\boldsymbol{H}\tag{4.22b}$$

式中,$\varepsilon_{ec}=\varepsilon(1-j\sigma/\omega\varepsilon)$,称为导电媒质的等效复介电常数,为频率的函数。可见,引入等效复介电常数 ε_{ec} 后导电媒质可看成是一种等效的介质,只要将相关表达式中的 ε 换成 ε_{ec} 即可。ε_{ec} 有时还写成以下表达形式:

$$\varepsilon_{ec}=\varepsilon_c'-j\varepsilon_c''$$

式中,$\varepsilon_c'=\varepsilon$,$\varepsilon_c''=\sigma/\omega$。这样,$\varepsilon_c''/\varepsilon_c'=\sigma/\omega\varepsilon$,它表示导电媒质中传导电流密度模值 $|\sigma\boldsymbol{E}|$ 与位移电流密度模值 $|j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}|$ 之比,也是导电媒质中位移电流密度 $\boldsymbol{J}_d$ 与总电流密度 $\boldsymbol{J}_t$(=

$\boldsymbol{J}_c+\boldsymbol{J}_d$）间夹角 δ_c 的正切，即

$$\tan\delta_c=\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{4.23}$$

$\tan\delta_c$ 称为损耗角正切，是工程中用于衡量介质材料损耗特性的一个常量。常用介质材料的 $\tan\delta_c$ 的近似值可见附录 C。

这样，导电媒质可按 $\sigma/\omega\epsilon$ 比值的量级分为三类：(1) $\sigma/\omega\epsilon\ll1$，一般取 $\sigma/\omega\epsilon\leqslant0.01$，为良介质；(2) $\sigma/\omega\epsilon\approx1$ 为半导体(或不良导体)；(3) $\sigma/\omega\epsilon\gg1$，一般取 $\sigma/\omega\epsilon\geqslant100$，为良导体。值得指出，媒质属于良介质还是良导体与频率有关，且媒质的参数也随频率变化。

通常将复矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方程(4.22)写成以下形式：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k_c'^2\boldsymbol{E}=\nabla^2\boldsymbol{E}-\gamma^2\boldsymbol{E}=0 \tag{4.24a}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+k_c'^2\boldsymbol{H}=\nabla^2\boldsymbol{H}-\gamma^2\boldsymbol{H}=0 \tag{4.24b}$$

式中，$k_c'=\omega\sqrt{\mu\epsilon_{cc}}$，称为等效复波数，而 $\gamma=jk_c'$ 定义为传播常数，一般是复数。显然，若将上式中的 k_c'用 k 代之，即得理想介质中复矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的齐次矢量亥姆霍兹方程。

4.2.2 平面波在导电媒质中的传播特性

引入等效复介电常数 ϵ_{cc}后，平面波在导电媒质中场的表达式和传播特性参数可仿照理想介质情况得到。在无源区域，仍假设沿正 z 方向传播的时谐电磁场的电场强度复矢量 $\boldsymbol{E}$ 只有 x 向分量 E_x，且 E_x 与 x，y 无关，则式(4.24a)简化为以下的二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}z^2}-\gamma^2E_x=0 \tag{4.25}$$

此方程的解写为 $E_0\mathrm{e}^{-\gamma z}$，于是

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_xE_0\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.26}$$

而磁场强度复矢量为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta_c}\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_y\frac{E_0}{\eta_c}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.27}$$

式中，$\eta_c=\sqrt{\mu/\epsilon_{cc}}=\sqrt{\mu/(\epsilon-j\sigma/\omega)}$，而传播常数 γ 因为是复数量，因此可用实部和虚部表示，即

$$\gamma=jk_c'=j\omega\sqrt{\mu\epsilon_{cc}}=\alpha+j\beta \tag{4.28}$$

式中，α 称为衰减常数；β 称为相位(或相移)常数。将上式两端取平方，可得

$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2+j2\alpha\beta=-k_c'^2=-\omega^2\mu\left(\epsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

再将上式两端的实、虚部分开并联立求解，有

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\sec\delta_c}\sin\left(\frac{\delta_c}{2}\right) \tag{4.29a}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\sec\delta_c}\cos\left(\frac{\delta_c}{2}\right) \tag{4.29b}$$

这样，将式(4.28)代入式(4.26)，得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-j\beta z} \tag{4.30}$$

其瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{a}_x E_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{4.31}$$

可见，导电媒质中场强的振幅随 z 的增加按指数规律不断衰减，衰减的大小取决于媒质的电导率。媒质的电导率越高，衰减量越大。衰减量可用场强衰减值的自然对数进行计量，衰减常数 α 的单位是奈贝每米(Np/m)。若电磁波在导电媒质中传播一段距离 l m 后场强幅值由 $|E_1|$ 衰减到 $|E_2|$，则

$$|E_2| = |E_1|\mathrm{e}^{-\alpha l}$$

于是，有

$$\alpha l = \ln\left|\frac{E_1}{E_2}\right| \quad \mathrm{Np}$$

或

$$\alpha = \frac{1}{l}\ln\left|\frac{E_1}{E_2}\right| \quad \mathrm{Np/m} \tag{4.32}$$

在工程上常用分贝(dB)作为衰减量的单位，其定义为

$$\alpha l = 10\lg\frac{P_1}{P_2} = 20\lg\left|\frac{E_1}{E_2}\right| \quad \mathrm{dB}$$

$$\alpha = \frac{20}{l}\lg\left|\frac{E_1}{E_2}\right| \quad \mathrm{dB/m} \tag{4.33}$$

根据上述关系可知，1 Np = 8.686 dB。

导电媒质中电磁波的波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{4.34}$$

式中，$\beta = \mathrm{Im}[\gamma]$，按式(4.29b)计算。注意，$\beta \neq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$。

导电媒质中电磁波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1}} < \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.35}$$

这表明，导电媒质中平面波的相速比 μ，ε 相同的理想介质中平面波的相速要慢，且 σ 越大，频率越低，则相速越慢。因此，携带信号的电磁波在导电媒质中传播时会产生失真。这种现

象称为波的色散，导电媒质称为色散媒质。

导电媒质的本征阻抗为

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}} e^{j\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = |\eta_c|\, e^{j\xi} \tag{4.36}$$

可见，$|\eta_c| < \sqrt{\mu/\varepsilon}$，$0 < \xi < \pi/4$（特别地，$\xi = 0$，对应于理想介质；$\xi = \pi/4$，对应于理想导体），即本征阻抗具有感性相角。这表明，电场强度的相位超前于磁场强度的相位，两者不再同相。此时磁场强度复矢量为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\gamma z} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\xi}$$

其瞬时表达式为

$$\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \xi)$$

即磁场强度的相位比电场强度的相位滞后 ξ，σ 越大滞后就越多，其振幅也随 z 的增加按指数规律衰减。

由于导电媒质中传播的电磁波的电场和磁场方向相互垂直，并且都垂直于波的传播方向，因此仍是 TEM 波。此时，复坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} e^{-j\xi} \tag{4.37}$$

这表明，复功率流密度不但有实部，而且有虚部，即既有沿正 z 方向传播的实功率，也有电场能量和磁场能量相互转换所对应的虚功率。于是，平均功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}_{av}$ 为

$$\boldsymbol{S}_{av} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{S}] = \boldsymbol{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos\xi \tag{4.38}$$

可见，平均功率流密度随 z 的增加按 $e^{-2\alpha z}$ 迅速衰减。

应指出，导电媒质中传播的电磁波的平均电、磁场能量密度不再相等，即 $(w_e)_{av} \neq (w_m)_{av}$，此时因 $\sigma \neq 0$ 引起传导电流而激发附加磁场，使 $(w_m)_{av} > (w_e)_{av}$。前面介绍的是一般导电媒质的情形，下面讨论两种具有代表性的导电媒质。

1）良介质中的平面波

良介质是一种低损耗的媒质，此时 $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$，即位移电流密度远大于传导电流密度，例如常见的聚四氟乙烯、聚苯乙烯以及有机玻璃等材料，在高频、超高频或更高频段中均有 $\sigma/\omega\varepsilon < 10^{-2}$。

对式(4.28)的第二个等式进行二项式级数展开，略去平方项以上的高阶项，可得传播常数的近似式为

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.39}$$

于是，良介质的衰减常数和相位常数分别为

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.40a}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.40b}$$

同理，良介质的本征阻抗和波的相速可分别近似为

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\frac{\sigma}{j2\omega\varepsilon}\right) \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.41}$$

$$v_p \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.42}$$

以上各式表明，平面波在良介质中传播时，除了电磁波场强的幅度因介质损耗引起微弱的衰减外，其他传播特性与理想介质情况几乎相同。

2）良导体中的平面波

对良导体，$\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$，即传导电流密度（模值）远大于位移电流密度（模值）。例如银、金、铜等金属，在整个微波波段都有 $\sigma/\omega\varepsilon \geqslant 10^2$（如铜（$\sigma=5.8\times10^7$ S/m）在频率高达 10^{16} Hz 时仍为良导体）。此时，等效复介电常数可近似为

$$\varepsilon_{ec} \approx \frac{\sigma}{j\omega} \tag{4.43}$$

这样，衰减常数为

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_{ec}} \approx j\omega\sqrt{\frac{\mu\sigma}{j\omega}} = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma}\,e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{4.44}$$

或

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{4.45}$$

良导体的本征阻抗为

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\,e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} \tag{4.46}$$

这表明良导体中磁场强度的相位滞后于电场强度 45°。良导体中电磁波的传播相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \tag{4.47}$$

由良导体中电磁波的衰减常数的表达式(4.45)可见，高频电磁波在良导体中衰减很大，因此高频电磁波在良导体中传播时衰减得非常快。所以，高频电磁场只能存在于导体表面附近的一个薄层内。这种现象称为趋肤效应。为此，定义一个新的物理量——趋肤深度，它是指电磁波场强的幅度衰减至导体表面处的 1/e（或 36.8%）的深度。记趋肤深度为 δ，因 $\alpha\delta=1$ 时场强幅度降为 1/e，故

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \tag{4.48}$$

又因 $\alpha \approx \beta$，于是

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \tag{4.49}$$

可见，根据良导体中电磁波的波长可近似计算趋肤深度。此外，由式(4.48)可知，导体材料的导电性能越好，频率越高，则趋肤深度越小。因此，虽然微波元器件通常用铜制作，但只要在导电层的表面镀上若干微米厚度的金或银(一般镀金，因银的表面易于氧化)，就能保证表面电流主要在金或银层内通过。

良导体中平面波的电、磁场强度复矢量可表示为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_0 \mathrm{e}^{-\gamma z} = \boldsymbol{a}_x E_0 \mathrm{e}^{-(1+j)\alpha z} = \boldsymbol{a}_x E_x \tag{4.50a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_x}{\eta_c} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{\eta_c} \mathrm{e}^{-(1-j)\alpha z} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} \mathrm{e}^{-(1+j)\alpha z} \mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{a}_y H_y \tag{4.50b}$$

于是，可得复功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 及平均功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}_{av}$ 为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{a}_z \frac{E_0^2}{2} \mathrm{e}^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1+j) \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{S}_{av} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{S}] = \boldsymbol{a}_z \frac{E_0^2}{2} \mathrm{e}^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \tag{4.52}$$

此外，通常将导体表面(设 $z=0$)处的切向电场 E_x 与切向磁场 H_y 之比定义为导体的表面阻抗，记为 Z_S，即

$$Z_S = \left.\frac{E_x}{H_y}\right|_{z=0} = \eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = R_S + jX_S \tag{4.53}$$

式中，R_S、X_S 分别称为表面电阻和表面电抗。

4.3 平面波的极化

前面讨论平面波的传播特性时，假设电磁波场强的方向沿某一固定方向(如 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 方向)。事实上，平面波场强的方向可随时间按一定规律变化。实用中通常用某种极化来描述平面波场强的方向随时间的变化规律。媒质中某点处电场强度矢量的尾端随时间的变化方式称为平面波的极化。按照矢量 $\boldsymbol{E}$ 的尾端轨迹的形状通常可将平面波的极化分为三种：线极化、圆极化和椭圆极化。无一定极化方式的波(如光波)通常称为随机极化波。下面分别讨论线极化、圆极化及椭圆极化三种情况。

假设平面波沿正 z 向传播，则电场强度 $\boldsymbol{E}$ 总可分解为 E_x 和 E_y 两个分量，即复矢量 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_x + \boldsymbol{a}_y E_y \tag{4.54}$$

若 E_x 的振幅为 $E_{x0}(E_{x0}>0)$，E_y 的振幅为 $E_{y0}(E_{y0}>0)$，且 E_y 相位滞后于 E_x 相位 φ (若 E_y 相位超前于 E_x，则 $\varphi<0$)，则上式可写为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_{x0} e^{-jkz} + \boldsymbol{a}_y E_{y0} e^{-jkz} e^{-j\varphi} \tag{4.55}$$

其瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}(z, t) = \boldsymbol{a}_x E_{x0} \cos(\omega t - kz) + \boldsymbol{a}_y E_{y0} \cos(\omega t - kz - \varphi) \tag{4.56}$$

这表明瞬时矢量 $\boldsymbol{E}(z, t)$的两个分量分别为

$$\left.\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{x0}\cos(\omega t - kz) \\ E_y(z, t) &= E_{y0}\cos(\omega t - kz - \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

在上两式中消去$(\omega t - kz)$，可得 $E_x(z, t)$和 $E_y(z, t)$间的以下关系：

$$\left[\frac{E_x(z, t)}{E_{x0}}\right]^2 + \left[\frac{E_y(z, t)}{E_{y0}}\right]^2 - \frac{2E_x(z, t)E_y(z, t)}{E_{x0}E_{y0}}\cos\varphi = \sin^2\varphi \tag{4.58}$$

这是对任意给定 z 值的情况下，$\boldsymbol{E}(z, t)$的尾端在 z 平面内的轨迹方程。对不同的 E_{x0} 和 E_{y0} 的比值及 φ 的取值，上式表示不同的几何图形，从而对应不同的极化方式。

4.3.1 线极化

当 $\varphi = 0$ 或 $\pm\pi$ 时，则方程(4.58)变为以下的方程：

$$E_y(z, t) = \pm\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right)E_x(z, t) \tag{4.59}$$

这是一直线方程，其中“+”对应于 $\varphi = 0°$；“−”对应于 $\varphi = \pm 180°$(或 $\pm\pi$)。根据式(4.57)，可得 $\boldsymbol{E}(z, t)$的方向与 x 轴正向间的夹角 α 为

$$\alpha = \arctan\frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \pm\arctan\frac{E_{y0}}{E_{x0}} \tag{4.60}$$

这表明 $\boldsymbol{E}(z, t)$的尾端轨迹是一直线，故称为线极化。图 4.4(a)示出了 $z = 0$ 平面上在 $\varphi = 0$ 情况下电场强度 $\boldsymbol{E}(0, t)$尾端的轨迹。

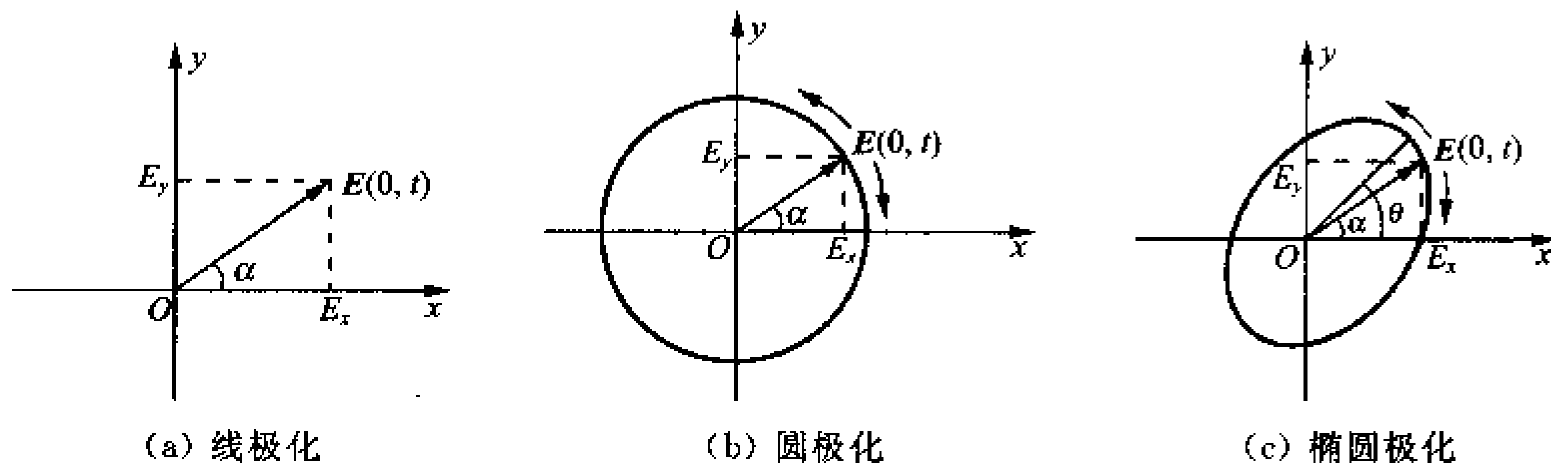


图 4.4　线、圆和椭圆极化

4.3.2 圆极化

当 $E_{x0} = E_{y0} = E_0$，$\varphi = \pm 90°$(或 $\varphi = \pm\pi/2$)时，由式(4.58)，可得

$$E_x^2(z,t)+E_y^2(z,t)=E_0^2 \tag{4.61}$$

这是半径为 E_0 的圆的方程，图 4.4(b)示出了 $z=0$ 平面上电场强度 $\boldsymbol{E}(0,t)$的变化轨迹。根据式(4.57)可知，$\boldsymbol{E}(z,t)$的大小不随 t 变化，而 $\boldsymbol{E}(z,t)$的方向与 x 轴的夹角为

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan\frac{E_0\cos\left(\omega t-kz\pm\frac{\pi}{2}\right)}{E_0\cos(\omega t-kz)}=\arctan[\mp\tan(\omega t-kz)]\\ &=\mp(\omega t-kz)\end{aligned} \tag{4.62}$$

这表明，对于给定 z 值的某点（如图中 $z=0$ 情况），随 t 的增加，场矢量 $\boldsymbol{E}(z,t)$的方向以角频率 ω 等速旋转。$\boldsymbol{E}(z,t)$的尾端轨迹是圆，故称为圆极化。正如图 4.4(b)所示，$\boldsymbol{E}(z,t)$的旋转方向出现两种不同的情况，因此圆极化有右旋圆极化和左旋圆极化之分。具体地，当 E_y 相位滞后于 $E_x 90°$（即 $\varphi=\pi/2$）时，$\boldsymbol{E}(z,t)$的旋向与波的传播方向($\boldsymbol{a}_z$)满足右手螺旋关系，称为右旋圆极化(或正圆极化)；当 E_y 相位超前 $E_x 90°$（即 $\varphi=-\pi/2$）时，$\boldsymbol{E}(z,t)$的旋向与波的传播方向($\boldsymbol{a}_z$)满足左手螺旋关系，称为左旋圆极化(或负圆极化)。这样，不难通过简单的方法判断圆极化是右旋还是左旋。判断时，只要将右手四指同大拇指垂直，右手四指从相位超前的电场分量旋转至相位滞后的分量，若波的传播方向为右手大拇指的指向，就是右旋圆极化。反之，则为左旋圆极化。在给定时刻，右旋圆极化波的电场的尾端轨迹恰为左旋螺旋线；左旋圆极化波的电场的尾端轨迹恰为右旋螺旋线。如图 4.5 所示。

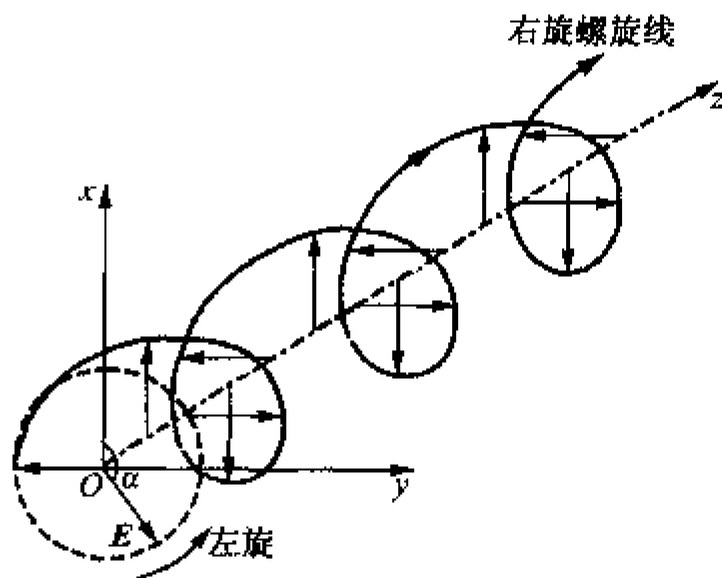


图 4.5 左旋圆极化波电场的右旋螺旋线

根据上述讨论可知，若波沿正 z 向传输，对左旋圆极化，因 $E_y=jE_x$，故电场强度复矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{a}_xE_0\mathrm{e}^{-jkz}+\boldsymbol{a}_yjE_0\mathrm{e}^{-jkz}\\&=(\boldsymbol{a}_x+j\boldsymbol{a}_y)E_0\mathrm{e}^{-jkz}\end{aligned} \tag{4.63}$$

对右旋圆极化，因 $E_y=-jE_x$，故电场强度复矢量为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{a}_x-j\boldsymbol{a}_y)E_0\mathrm{e}^{-jkz} \tag{4.64}$$

可见，两个相位相差 $\pi/2$，振幅相等，空间上正交的线极化波可合成一个圆极化波；反之，一个圆极化波可分解为两个相位相差 $\pi/2$，振幅相等，空间上正交的线极化波。

4.3.3 椭圆极化

最一般的情况是式(4.58)中相位差 φ 为任意值（但 $\varphi\neq0,\ \pm\pi$，以及 $\varphi=\pm\pi/2$ 时 $E_{x0}\neq E_{y0}$）的情况，式(4.58)是一个椭圆方程，此时矢量 $\boldsymbol{E}(z,t)$的尾端在椭圆上变化，故称为椭圆极化，对应的波为椭圆极化波。图 4.4(c)示出了 $z=0$ 平面上矢量 $\boldsymbol{E}(0,t)$尾端的变化轨迹。由式(4.57)可知，$\boldsymbol{E}(0,t)$与 x 轴正向间夹角的正切为

$$\tan\alpha=\frac{E_{y0}\cos(\omega t-kz-\varphi)}{E_{x0}\cos(\omega t-kz)}=\frac{E_{y0}}{E_{x0}}[\cos\varphi+\tan(\omega t-kz)\sin\varphi] \tag{4.65}$$

显然,$\boldsymbol{E}(0,t)$的尾端在椭圆上非匀速旋转。椭圆极化也有两种旋向,当波沿正 z 向传播时,若 E_y 相位滞后 E_x 相位 $\varphi(0<\varphi\leqslant\pi/2)$,矢量 $\boldsymbol{E}(z,t)$逆时针旋转,为右旋椭圆极化;反之,当 E_y 相位超前 E_x 相位 $\varphi(-\pi/2\leqslant\varphi<0)$ 时,矢量 $\boldsymbol{E}(z,t)$顺时针旋转,为左旋椭圆极化。

可以证明,椭圆长轴与 x 轴正向间的夹角(或称为椭圆的倾角)θ 由下式确定:

$$\tan 2\theta=\frac{2E_{x0}E_{y0}}{E_{x0}^2-E_{y0}^2}\cos\varphi \tag{4.66}$$

与圆极化的情况类似,两个空间上正交的线极化波可合成为一个椭圆极化波;反之,一个椭圆极化波可分解为两个空间上正交的线极化波。同样可证明,两个旋向相反的圆极化波可合成为一个椭圆极化波;反之,一个椭圆极化波可分解为两个旋向相反的圆极化波。

例 4.2 判断以下各式代表的是什么极化波?波向什么方向传输?

① $\boldsymbol{E}=E_0(j\boldsymbol{a}_x-3j\boldsymbol{a}_y)e^{jkz}$;

② $\boldsymbol{E}=E_0(\boldsymbol{a}_x+2j\boldsymbol{a}_z)e^{-jky}$;

③ $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_xE_0\sin(\omega t-kz)+\boldsymbol{a}_yE_0\cos(\omega t-kz)$;

④ $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_xE_0\sin\left(\omega t-kz+\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{a}_yE_0\cos\left(\omega t-kz-\frac{\pi}{4}\right)$。

解:① 因 $\boldsymbol{E}=jE_0(\boldsymbol{a}_x-3\boldsymbol{a}_y)e^{jkz}$,即 $E_{x0}=E_0$, $E_{y0}=3E_0$,而 E_x 与 E_y 间的相位差为 π,而波沿负 z 向传输,故此电场所代表的波是沿负 z 向传输的线极化波。

② 因 $E_{x0}=E_0$, $E_{z0}=2E_0$,而 E_x 滞后于 E_z 的相位为 $\pi/2$,又知波沿正 y 向传播,故此电场代表的波是沿正 y 向传播的右旋椭圆极化波。

③ 因电场强度复矢量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_xE_0(-j)e^{-jkz}+\boldsymbol{a}_yE_0e^{-jkz}$$

即 $E_{x0}=E_0$, $E_{y0}=E_0$, E_y 超前于 E_x 的相位为 $\pi/2$,而波沿正 z 向传播,故此电场代表的波是一个沿正 z 向传播的左旋圆极化波。

④ 因电场强度复矢量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_xE_0(-j)e^{j\frac{\pi}{4}}e^{jkz}+\boldsymbol{a}_yE_0e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{jkz}$$

即 $E_{x0}=E_{y0}$, E_x 与 E_y 同相位(即 $\varphi=0°$)。因波沿负 z 向传播,故此电场代表的波是一个沿负 z 向传播的线极化波。

4.4 平面波的反射与透射

当平面波以任意角度 θ_i 入射到两种媒质的平面分界面上时,称这种入射为斜入射。设两种媒质具有不同的电参数(μ_1, ε_1)和(μ_2, ε_2),由于平面分界面处媒质的不连续性,因此入射波中的一部分被反射,另一部分则继续向前传输。取 $z=0$ 处为平面分界面,并定义分界

面的法向单位矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 与入射波传播方向的波矢量所构成的平面为入射面。如图 4.6 所示。

为导出著名的斯耐尔反射和折射定律，在入射波中任取两根入射线，则有相应的两根反射线和透射线，这些射线必然处于入射面内，如图 4.6 所示。首先考虑入射线和反射线的情况。由图可知，入射线 2 在入射到分界面之前比入射线 1 多行进了 A_iO' 距离，而当射线 2 被分界面反射时射线 1 则多行进了 OA_r 的距离，而 OA_r 和 $O'A_i$ 分别是入射波和反射波的等相位面，因此射线 2 经过距离 $O'A_i$ 所花的时间应等于射线 1 经过距离 OA_r 所花的时间。又因入射线和反射线都处于媒质 1 中，故它们的相速相等，即 $v_{p1}=v_{p1}$。于是

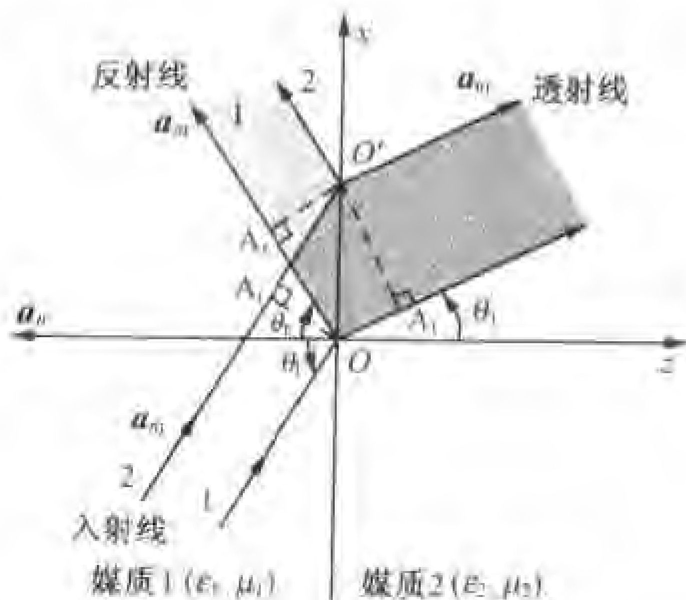


图 4.6 平面分界面上的斜入射

$$\frac{O'A_i}{v_{p1}}=\frac{OA_r}{v_{p1}}$$

由图中的几何关系知，$OO'\sin\theta_i=OO'\sin\theta_r$，因此

$$\theta_r=\theta_i \tag{4.67}$$

这表明反射角等于入射角。这就是斯耐尔(Snell)反射定律。

然后考虑入射线和透射线的情况。由图可知，入射线 2 经过距离 $O'A_i$ 所花的时间与透射线 1 经过距离 OA_t 所花的时间应相等，即

$$\frac{O'A_i}{v_{p1}}=\frac{OA_t}{v_{p2}}$$

式中，$v_{p1}=1/\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$，$v_{p2}=1/\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$。由图中的几何关系知，$O'A_i=OO'\sin\theta_i$，$OA_t=OO'\sin\theta_t$。于是，上式变为

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\frac{v_{p2}}{v_{p1}}=\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} \tag{4.68}$$

式中，$n_i\,(i=1,2)$ 为媒质 i 的折射率，定义为电磁波在自由空间中的速度与媒质 i 中的相速之比，即 $n_i=c/v_{pi}$。对大多数媒质(即非磁性媒质)，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，上式变为

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \tag{4.69}$$

这就是我们熟知的斯耐尔折射定律。下面，根据能量守恒定律导出入射波、反射波和透射波的幅度之间满足的关系式。

因沿任意方向传输的平面波在单位面积上传输的平均功率为 $|E_0|^2/2\eta$ (因沿波的传输方向($\boldsymbol{a}_n$)的平均能流密度矢量 $\boldsymbol{S}_{av}=\boldsymbol{a}_n|E_0|^2/2\eta$)，故入射波、反射波和透射波携带的能量投射到图 4.7 分界面面积 S 上的平均入射功率 P_i、反射功率 P_r 和透射功率 P_t 分别为

$$P_i = |(\boldsymbol{S}_i)_{av}| S_i = \frac{1}{2\eta_1}|E_{i0}|^2 S\cos\theta_i \tag{4.70a}$$

$$P_r = |(\boldsymbol{S}_r)_{av}| S_r = \frac{1}{2\eta_1}|E_{r0}|^2 S\cos\theta_r \tag{4.70b}$$

$$P_t = |(\boldsymbol{S}_t)_{av}| S_t = \frac{1}{2\eta_2}|E_{t0}|^2 S\cos\theta_t \tag{4.70c}$$

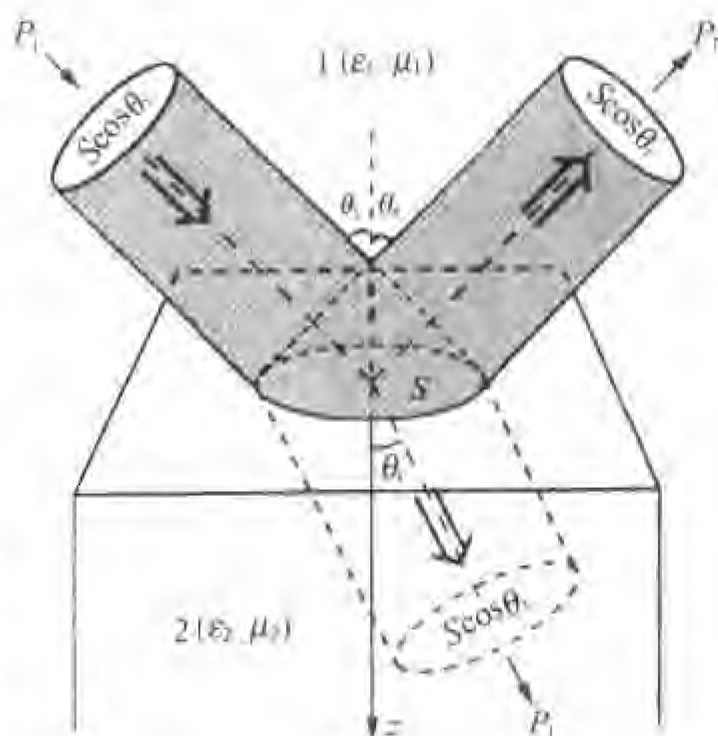


图4.7 入射波、反射波和透射波在分界面上的投影

式中，$S_i = S\cos\theta_i$，$S_r = S\cos\theta_r$，$S_t = S\cos\theta_t$，分别为入射波、反射波和透射波对应的截面积，而E_{i0}、E_{r0}以及E_{t0}分别为入射波、反射波以及透射波的电场强度的复振幅。事实上，以上各式均可取其各自的平均功率流密度矢量在图中分界面面积S上的投影而得到，如对入射波，有

$$P_i = (\boldsymbol{S}_i)_{av} \cdot (\boldsymbol{a}_z S) = \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1}\boldsymbol{a}_{ni} \cdot (\boldsymbol{a}_z S) = \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} S\cos\theta_i$$

根据能量守恒定律，且不计分界面处入射波投射到分界面瞬间出现的瞬时电荷积聚效应（即只考虑稳态情况）。于是，有$P_i = P_r + P_t$，即

$$|(\boldsymbol{S}_i)_{av}| S\cos\theta_i = |(\boldsymbol{S}_r)_{av}| S\cos\theta_r + |(\boldsymbol{S}_t)_{av}| S\cos\theta_t$$

或

$$\frac{1}{2\eta_1}|E_{i0}|^2\cos\theta_i = \frac{1}{2\eta_1}|E_{r0}|^2\cos\theta_r + \frac{1}{2\eta_2}|E_{t0}|^2\cos\theta_t$$

所以，入射波、反射波和透射波电场强度的幅度间的关系为

$$\frac{|E_{r0}|^2}{|E_{i0}|^2} = 1 - \frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{|E_{t0}|^2\cos\theta_t}{|E_{i0}|^2\cos\theta_i} \tag{4.71}$$

前面简单讨论了反射波和透射波方向与入射波方向间的关系以及它们的电场强度的幅度之间满足的关系，这些关系对任何极化方式的波均适用，这是因为入射波、反射波及透射波的场并未参与推导。事实上，反射波和透射波的场的特性与入射波的场的极化特性有关。

为了便于求解与任意方向极化的入射波的场对应的反射波和透射波的场，将入射波的电场强度$\boldsymbol{E}_i$分解成垂直于和平行于入射面的两个分量，并称$\boldsymbol{E}_i$垂直于入射面为垂直极化；$\boldsymbol{E}_i$平行于入射面为平行极化。这样，可分别求解垂直极化和平行极化情况下反射波和透射波的场量，然后将两者所得的场量进行叠加，即得与任意方向极化的入射波电场强度$\boldsymbol{E}_i$对应的总的反射波和透射波的场。下面分别对垂直极化和平行极化进行讨论。

4.4.1 垂直极化

对垂直极化，选取直角坐标如图4.8所示，取$\boldsymbol{E}_i$沿$\boldsymbol{a}_y$方向，则

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1 \boldsymbol{a}_{ni} \cdot \boldsymbol{r}} \tag{4.72}$$

式中，$\boldsymbol{a}_{ni} = \boldsymbol{a}_x \sin\theta_i + \boldsymbol{a}_z \cos\theta_i$，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z$。于是，入射波的复场矢量 $\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{H}_i$ 分别为

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{4.73a}$$

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{1}{\eta_1}[\boldsymbol{a}_{ni} \times \boldsymbol{E}_i(x, z)] = \frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\boldsymbol{a}_x \cos\theta_i + \boldsymbol{a}_z \sin\theta_i) e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{4.73b}$$

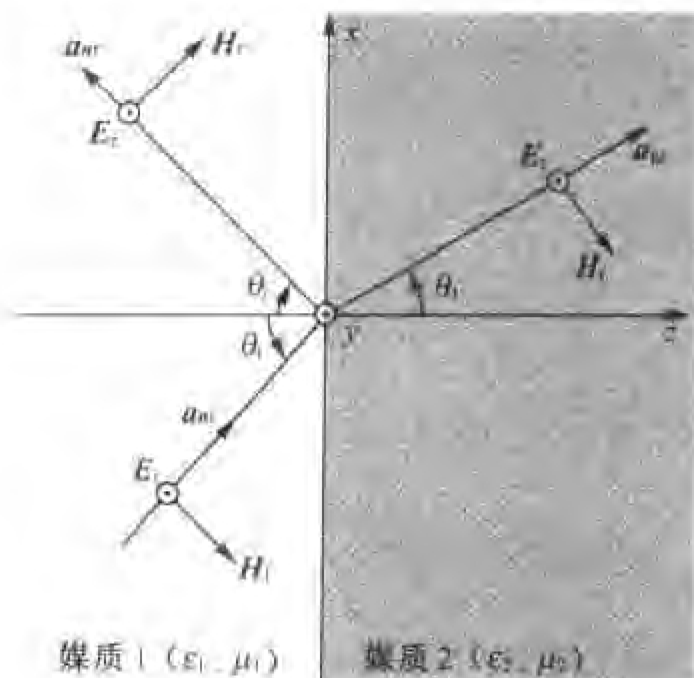


图 4.8　垂直极化

类似地，对反射波，有

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 \boldsymbol{a}_{nr} \cdot \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{4.74a}$$

$$\boldsymbol{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta_1}(\boldsymbol{a}_x \sin\theta_r + \boldsymbol{a}_z \cos\theta_r) e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{4.74b}$$

式中，$\boldsymbol{a}_{nr} = \boldsymbol{a}_x \sin\theta_r - \boldsymbol{a}_z \cos\theta_r$。对透射波，有

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{4.75a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\boldsymbol{a}_x \cos\theta_t + \boldsymbol{a}_z \sin\theta_t) e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{4.75b}$$

式中，$\boldsymbol{a}_{nt} = \boldsymbol{a}_x \sin\theta_t + \boldsymbol{a}_z \cos\theta_t$。

媒质分界面（$z = 0$）处电场强度和磁场强度的切向分量满足以下的边界条件：

$$\left.\begin{aligned} (E_{iy} + E_{ry})\big|_{z=0} &= E_{ty}\big|_{z=0} \\ (H_{ix} + H_{rx})\big|_{z=0} &= H_{tx}\big|_{z=0} \end{aligned}\right\} \tag{4.76}$$

将式(4.73)、(4.74)和式(4.75)代入上述边界条件，可得

$$\left.\begin{aligned} &E_{i0} e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0} e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r} = E_{t0} e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \\ &\frac{1}{\eta_1}(-E_{i0}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0}\cos\theta_r e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r}) = -\frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \end{aligned}\right\} \tag{4.77}$$

由于上式对 $z = 0$ 平面所有 x 都成立，因此两式中各项所含的指数因子必相等，故有

$$\beta_1 x\sin\theta_i = \beta_1 x\sin\theta_r = \beta_2 x\sin\theta_t \tag{4.78}$$

即

$$\beta_{ix} = \beta_{rx} = \beta_{tx} \tag{4.79}$$

这表明，入射波、反射波和透射波的传播常数矢量 $\boldsymbol{\gamma}_i$、$\boldsymbol{\gamma}_r$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_t$ 沿媒质分界面的切向分量都相等，即 x 向的波数连续。这一结论称为相位匹配条件。同理可证，$\beta_{iy} = \beta_{ry} = \beta_{ty}$。此外，由式(4.78)可见，此式同斯耐尔反射定律和折射定律的表达式完全相同。

于是，式(4.77)可简化为

$$\left.\begin{aligned} &E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ &\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0})\cos\theta_i = \frac{1}{\eta_2}E_{t0}\cos\theta_t \end{aligned}\right\} \tag{4.80}$$

由以上两方程可解出用 E_{i0} 表示的 E_{r0} 和 E_{t0}。

通常将媒质分界面（$z=0$）处反射波和透射波的电场强度的复振幅 E_{r0}，E_{t0} 与入射波电场强度的复振幅 E_{i0} 之比，分别定义为反射系数和透射系数（或传输系数），并分别用 Γ 和 T 表示，它们均无量纲。

这样，对垂直极化，由式(4.80)可得反射系数 $\Gamma_{\perp}$ 和透射系数 $T_{\perp}$ 分别为

$$\Gamma_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \tag{4.81a}$$

$$T_{\perp}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \tag{4.81b}$$

上述反射系数和透射系数公式称为垂直极化的菲涅尔(Fresnel)公式。$\Gamma_{\perp}$ 和 $T_{\perp}$ 间满足以下关系：

$$1+\Gamma_{\perp}=T_{\perp} \qquad 1-\Gamma_{\perp}=\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}T_{\perp} \tag{4.82}$$

显然，式(4.71)对垂直极化成立。

对非磁性媒质，式(4.81)变为

$$\Gamma_{\perp}=\frac{\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}=\frac{\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{4.83a}$$

$$T_{\perp}=\frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}=\frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{4.83b}$$

可见，当 $\theta_i=0$ 时，$\theta_r=\theta_t=0$，此时是垂直入射(或正入射)的情况，后面将详细讨论。此外，当第 2 种媒质为理想导体时，因 $\sigma_2\to\infty$，$\eta_2=0$，可得 $\Gamma_{\perp}=-1$ 以及 $T_{\perp}=0$。

例 4.3　采用如图 4.8 所示坐标，一平面波从空气中入射到 $z=0$ 处的空气(媒质 1)与土壤(媒质 2)的交界面上，入射波的电场强度 $\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{a}_y100\cos(\omega t-\pi x-1.73\pi z)\text{V/m}$，土壤视为相对介电常数 $\varepsilon_{r2}=4$ 的无耗介质。求：① 空气和土壤中电磁波的波长、相移常数 β_1，β_2，以及入射角 θ_i，透射角 θ_t；② 空气和土壤中电场强度的瞬时表达式；③ 土壤中透射波的平均功率密度的模值。

解：① 因入射波电场强度的复数表达式为

$$\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{a}_y100\mathrm{e}^{-j\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{a}_y100\mathrm{e}^{-j(\pi x+1.73\pi z)}$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1=\beta_1\sin\theta_i\boldsymbol{a}_x+\beta_1\cos\theta_i\boldsymbol{a}_z=\pi\boldsymbol{a}_x+1.73\pi\boldsymbol{a}_z$。于是，空气中的相移常数和波长分别为

$$\beta_1=\sqrt{\pi^2+(1.73\pi)^2}=2\pi\ \text{rad/m}$$

$$\lambda_1=\lambda_0=\frac{2\pi}{\beta_1}=1\ \text{m}$$

土壤中的相移常数和波长分别为

$$\lambda_2=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=0.5\ \text{m}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi \text{ rad/m}$$

由 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的表达式，可得入射角 θ_i 为

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{\pi}{1.73\pi}\right) = 30°$$

这样，由式(4.69)可得透射角 θ_t 为

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin(0.25) = 14.48°$$

② 由式(4.83)，可得垂直极化波的反射系数 $\Gamma_\perp$ 和透射系数 $T_\perp$ 分别为

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}} = -0.38$$

$$T_\perp = 1 + \Gamma_\perp = 0.62$$

因入射波电场强度的复振幅 $E_{i0} = 100e^{j0°}$ V/m，故媒质 1 中合成波的电场强度的复数表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{E}_{1i} + \boldsymbol{E}_{1r} = \boldsymbol{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_y \Gamma_\perp E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \\ &= \boldsymbol{a}_y 100 e^{-j(\pi x + 1.73\pi z)} - \boldsymbol{a}_y 38 E_{i0} e^{-j(\pi x - 1.73\pi z)} \end{aligned}$$

于是

媒质 1 中合成波的电场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}_1(t) = \text{Re}[\boldsymbol{E}_1 e^{j\omega t}] = \boldsymbol{a}_y[100\cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z) - 38\cos(\omega t - \pi x + 1.73\pi z)] \text{ V/m}$$

媒质 2 中波的电场强度的复数形式为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{a}_y T_\perp E_{i0} e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} = \boldsymbol{a}_y 62 e^{-j(\pi x + 3.87\pi z)}$$

以及其瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}_2(t) = \boldsymbol{a}_y 62\cos(\omega t - \pi x - 3.87\pi z) \text{ V/m}$$

③ 因在媒质 2 中，$\eta_2 = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 60\pi\ \Omega$，透射波的平均功率密度的模值为

$$(S_t)_{av} = |(\boldsymbol{S}_t)_{av}| = \left|\boldsymbol{a}_{nt}\frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2}\right| = \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2} = \frac{62^2}{2\times 60\pi} = 10.2 \text{ W/m}^2$$

4.4.2 平行极化

对平行极化，入射电场 $\boldsymbol{E}_i$ 处于入射面内，如图 4.9 所示。此时媒质 1 中入射波、反射波和媒质 2 中透射波的场量可分别表示为

$$\boldsymbol{E}_i = (\boldsymbol{a}_x\cos\theta_i - \boldsymbol{a}_z\sin\theta_i)E_{i0}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{4.84a}$$

$$\boldsymbol{H}_{i}=\boldsymbol{a}_{y}\frac{E_{i0}}{\eta_{1}}e^{-j\beta_{1}(x\sin\theta_{i}+z\cos\theta_{i})} \tag{4.84b}$$

$$\boldsymbol{E}_{r}=\Gamma_{/\!/}E_{i0}(\boldsymbol{a}_{x}\cos\theta_{r}+\boldsymbol{a}_{z}\sin\theta_{r})e^{-j\beta_{1}(x\sin\theta_{r}-z\cos\theta_{r})} \tag{4.84c}$$

$$\boldsymbol{H}_{r}=-\boldsymbol{a}_{y}\frac{\Gamma_{/\!/}E_{i0}}{\eta_{1}}e^{-j\beta_{1}(x\sin\theta_{r}-z\cos\theta_{r})} \tag{4.84d}$$

$$\boldsymbol{E}_{t}=T_{/\!/}E_{i0}(\boldsymbol{a}_{x}\cos\theta_{t}-\boldsymbol{a}_{z}\sin\theta_{t})e^{-j\beta_{2}(x\sin\theta_{t}+z\cos\theta_{t})} \tag{4.84e}$$

$$\boldsymbol{H}_{t}=\boldsymbol{a}_{y}\frac{T_{/\!/}E_{i0}}{\eta_{2}}e^{-j\beta_{2}(x\sin\theta_{t}+z\cos\theta_{t})} \tag{4.84f}$$

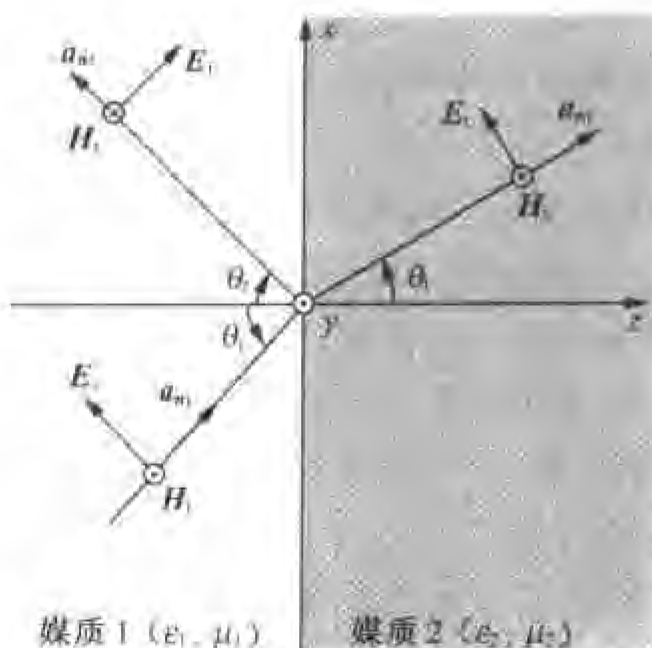


图 4.9 平行极化

式中，$\Gamma_{/\!/}$ 和 $T_{/\!/}$ 分别是平行极化时的反射系数和透射系数。

类似于垂直极化，为导出 $\Gamma_{/\!/}$ 和 $T_{/\!/}$ 的表达式，将公式(4.84)代入 $z=0$ 平面处切向电场和磁场连续的边界条件，并考虑到相位匹配条件，可得

$$1+\Gamma_{/\!/}=T_{/\!/}\frac{\cos\theta_{t}}{\cos\theta_{i}}\qquad 1-\Gamma_{/\!/}=T_{/\!/}\frac{\eta_{1}}{\eta_{2}} \tag{4.85}$$

显然，式(4.71)对平行极化成立。最后，联立求解上式的两个方程，得

$$\Gamma_{/\!/}=\frac{\eta_{2}\cos\theta_{t}-\eta_{1}\cos\theta_{i}}{\eta_{2}\cos\theta_{t}+\eta_{1}\cos\theta_{i}} \tag{4.86a}$$

$$T_{/\!/}=\frac{2\eta_{2}\cos\theta_{i}}{\eta_{2}\cos\theta_{t}+\eta_{1}\cos\theta_{i}} \tag{4.86b}$$

可见，以上两式在形式上类似于垂直极化的两个表达式，不过两者并非完全相同。将以上两式同垂直极化对应的 $\Gamma_{\perp}$ 和 $T_{\perp}$ 比较可知，当 $\theta_i=0$ 时，两者表达式完全相同，这是垂直入射(正入射)情况。同时，当第二种媒质为理想导体时，$\eta_2=0$，也有 $\Gamma_{/\!/}=-1$ 以及 $T_{/\!/}=0$。

图 4.10 示出了平面波从空气中入射到三种不同电介质表面：干土 ($\varepsilon=3\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$)、潮土 ($\varepsilon=25\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$)、水 ($\varepsilon=80\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$) 时 $|\Gamma_{\perp}|$ 和 $|\Gamma_{/\!/}|$ 随 θ_i 的变化曲线。由图可见：(1) 对每一种介质，当 $\theta_i=0°$ 时，均有 $\Gamma_{\perp}=\Gamma_{/\!/}$；(2) 当 $\theta_i=90°$ 时，$|\Gamma_{\perp}|=|\Gamma_{/\!/}|=1$；(3) 对平行极化，随 θ_i 的变化，三种情况均有 $\Gamma_{/\!/}=0$ 出现（这对应于后面将要讨论的全透射情况，此时的 θ_i 称为布儒斯特角，记为 θ_B）；对垂直极化，随 θ_i 的变化则不会出现 $\Gamma_{\perp}=0$(事实

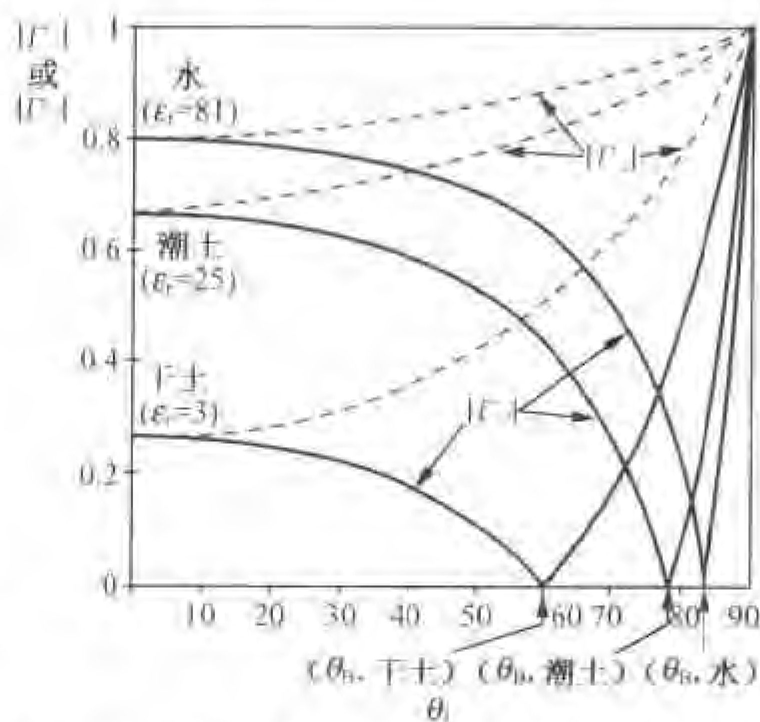


图 4.10 三种情况下 $|\Gamma_{\perp}|$ 和 $|\Gamma_{/\!/}|$ 随 θ_i 的变化曲线

上，对非磁性媒质，总有 $\Gamma_\perp \neq 0$）。

将垂直极化和平行极化两种情况下媒质 1 中的入射波和反射波的电场和磁场进行叠加，可知媒质 1 中的合成波具有以下特点：(1) 合成波沿 x 向（与界面相切的方向）传播，不再是横电磁波。具体地说，对垂直极化，合成波是横电波（即合成波的电场无 x 向分量，但磁场有 x 向分量），记为 TE_x 波；对平行极化，合成波是横磁波（即合成波的磁场无 x 向分量，但电场有 x 向分量），记为 TM_x 波；(2) 合成波的场除相位沿 x 向变化外，振幅沿 z 向发生变化，等相位面上不同的 z 处振幅不同，因而是非均匀平面波。

例 4.4 一均匀平面波由空气斜入射至理想导体表面，入射波的电场强度为 $\boldsymbol{E}_i = (\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z + \boldsymbol{a}_y j\sqrt{2})E_{i0}e^{-j(\pi x + Az)}$ V/m。求：① 常数 A，波长 λ，入射波传播方向上的单位矢量 $\boldsymbol{a}_{ni}$ 以及入射角 θ_i；② 反射波的电场强度复矢量表达式；③ 入射波和反射波各是什么形式的极化波？

解：① 因入射波的波矢量 $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{a}_x\pi + \boldsymbol{a}_z A$，又因 $\boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i = 0$，即 $(\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z + \boldsymbol{a}_y j\sqrt{2}) \cdot (\boldsymbol{a}_x\pi + \boldsymbol{a}_z A) = 0$，于是

$$A = \pi,\ \lambda = \frac{2\pi}{\beta_i} = \sqrt{2}\ \text{m},\ \boldsymbol{a}_{ni} = \frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\beta_i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z)$$

又因为 $\cos\theta_i = \boldsymbol{a}_{ni} \cdot \boldsymbol{a}_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\theta_i = 45^\circ$$

② 因反射波传播方向上的单位矢量 $\boldsymbol{a}_{nr}$ 为

$$\boldsymbol{a}_{nr} = \boldsymbol{a}_x \sin\theta_i - \boldsymbol{a}_z \cos\theta_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z)$$

故反射波的波矢量 $\boldsymbol{\beta}_r$ 为

$$\boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{a}_{nr}\beta_r = \boldsymbol{a}_{nr}\beta_i = (\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z)\pi$$

因入射波电场可分解为垂直极化（$\boldsymbol{a}_y$ 向）分量和平行极化（($\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z$) 向）分量两部分，面反射波电场同样可分为两部分，即

$$\boldsymbol{E}_{r\perp} = \boldsymbol{a}_y E_{r0\perp} e^{-j\boldsymbol{\beta}_r \cdot \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}_y(-E_{i0\perp})e^{-j(x-z)\pi} = -\boldsymbol{a}_y j\sqrt{2}E_{i0}e^{-j(x-z)\pi}$$

$$\boldsymbol{E}_{r/\!/} = (\boldsymbol{a}_x\cos\theta_i + \boldsymbol{a}_z\sin\theta_i)E_{r0/\!/}e^{-j\boldsymbol{\beta}_r \cdot \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z)E_{i0/\!/}e^{-j\boldsymbol{\beta}_r \cdot \boldsymbol{r}}$$

$$= -(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z)\frac{1}{\sqrt{2}}E_{i0/\!/}e^{-j(x-z)\pi} = -(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z)E_{i0}e^{-j(x-z)\pi}$$

式中利用了关系式：$E_{r0\perp} = \Gamma_\perp E_{i0\perp} = -E_{i0\perp}$，$E_{r0/\!/} = -E_{i0/\!/}$ 以及 $E_{i0\perp} = \sqrt{2}E_{i0}$，$E_{i0/\!/} = \sqrt{2}E_{i0}$。这样，有

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}_{r\perp} + \boldsymbol{E}_{r/\!/} = -(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z + \boldsymbol{a}_y j\sqrt{2})E_{i0}e^{-j(x-z)\pi}\ \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_r = \frac{1}{\eta_0}(\boldsymbol{a}_{nr} \times \boldsymbol{E}_r) = [\boldsymbol{a}_y\sqrt{2} - (\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z)j] \times (2.65 \times 10^{-3})E_{i0}e^{-j(x-z)\pi}\ \text{A/m}$$

③ 由 $\boldsymbol{E}_i$ 及 $\boldsymbol{E}_r$ 的表达式可见，入射波电场的 $\boldsymbol{a}_y$ 向分量超前于 $(\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_z)$ 向分量且振幅相等(均为$\sqrt{2}E_{i0}$)，故入射波为左旋圆极化波；反射波电场的 $\boldsymbol{a}_y$ 向分量滞后于 $-(\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_z)$ 向分量 90°且振幅相等，故反射波为右旋圆极化波。

4.4.3 平面边界上的垂直入射(正入射)

设媒质1和媒质2均为理想介质，选取坐标如图4.11所示。当平面波垂直入射到媒质1、2的平面分界面上时，反射波的场与透射波的场的特性与入射波场的极化方向无关，此时不必再区分垂直极化和平行极化。设 $\boldsymbol{E}_i$ 的极化方向沿 x 向，由于分界面处电场切向分量应连续，因此，反射波和透射波的电场方向也应沿 x 向，如图4.11所示。于是，入射波、反射波和透射波的电场和磁场复矢量分别为

$$\left.\begin{aligned}
&\text{入射波}:\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{a}_xE_{i0}e^{-j\beta_1 z},\ \boldsymbol{H}_i=\frac{1}{\eta_1}(\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{E}_i)=\boldsymbol{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z}\\
&\text{反射波}:\boldsymbol{E}_r=\boldsymbol{a}_xE_{r0}e^{j\beta_1 z},\ \boldsymbol{H}_r=\frac{1}{\eta_1}[(-\boldsymbol{a}_z)\times\boldsymbol{E}_r]=-\boldsymbol{a}_y\frac{E_{r0}}{\eta_1}e^{j\beta_1 z}\\
&\text{透射波}:\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{a}_xE_{t0}e^{-j\beta_2 z},\ \boldsymbol{H}_t=\frac{1}{\eta_2}[\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{E}_t]=\boldsymbol{a}_y\frac{E_{t0}}{\eta_2}e^{-j\beta_2 z}
\end{aligned}\right\}\tag{4.87}$$

式中，$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=2\pi/\lambda_1$；$\beta_2=2\pi/\lambda_2$；$\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$；$\eta_2=\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$。

利用平面分界面($z=0$)处电场和磁场切向分量连续的边界条件，可得

$$\left.\begin{aligned}
&E_{i0}+E_{r0}=E_{t0}\\
&\frac{E_{i0}}{\eta_1}-\frac{E_{r0}}{\eta_1}=\frac{E_{t0}}{\eta_2}
\end{aligned}\right\}\tag{4.88}$$

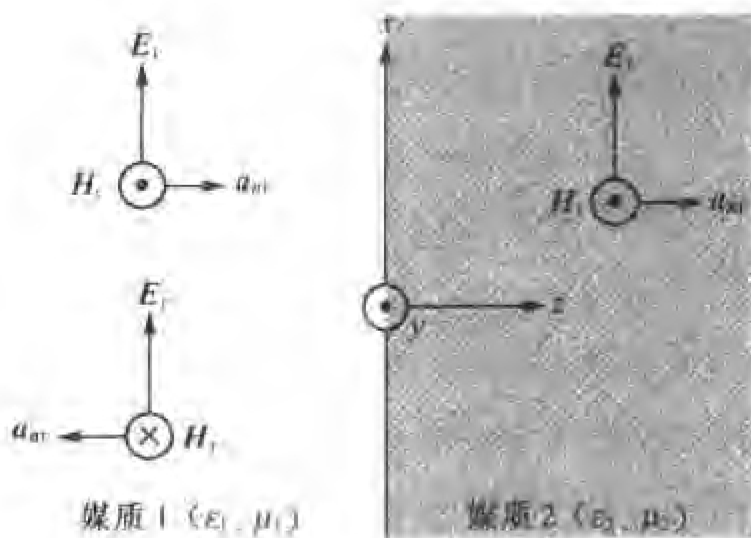


图4.11 平面边界上的垂直入射

于是，可解得反射系数和透射系数分别为

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\tag{4.89a}$$

$$T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\tag{4.89b}$$

两者间的关系为

$$1+\Gamma=T\tag{4.90}$$

这样，媒质1中合成波的电场和磁场复矢量可表示为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{a}_xE_{i0}(e^{-j\beta_1 z}+\Gamma e^{j\beta_1 z})=\boldsymbol{a}_xE_{i0}[Te^{-j\beta_1 z}+\Gamma(2j\sin\beta_1 z)]\tag{4.91a}$$

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z}-\Gamma e^{j\beta_1 z})\tag{4.91b}$$

媒质 2 中的电场和磁场复矢量可表示为

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{a}_x TE_{i0}\mathrm{e}^{-j\beta_2 z} \tag{4.92a}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{a}_y T\frac{E_{i0}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-j\beta_2 z} \tag{4.92b}$$

若设 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$，$\varepsilon_1<\varepsilon_2$，由式(4.89)，有

$$\Gamma=\frac{1-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}{1+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}=-|\Gamma|$$

$$T=\frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}=1-|\Gamma|$$

则式(4.91)变为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{a}_x E_{i0}(1-|\Gamma|\mathrm{e}^{j2\beta_1 z})\mathrm{e}^{-j\beta_1 z} \tag{4.93a}$$

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}(1+|\Gamma|\mathrm{e}^{j2\beta_1 z})\mathrm{e}^{-j\beta_1 z} \tag{4.93b}$$

此时$|\boldsymbol{E}_1|$和$|\boldsymbol{H}_1|$随 z 的分布如图 4.12 所示。由图可见，$|\boldsymbol{E}_1|$和$|\boldsymbol{H}_1|$随 z 的分布不再像图 4.2(b)那样的分布特点，此时$|\boldsymbol{E}_1|$和$|\boldsymbol{H}_1|$随 z 的变化出现极大值和极小值，且呈周期分布，这表明媒质 1 中合成波的场呈驻波分布。通常将场出现极大值的点称为场的驻波腹点；场出现极小值的点称为场的驻波节点，这些点的位置都不随时间变化，故具有驻波特性。具体地，在 $2\beta_1 z_{\min}=-2m\pi(m=0,1,2\cdots)$ 处，即 $z_{\min}=-m\lambda/2$ 处，电场的振幅出现极小值，磁场的振幅则出现极大值，因此称这些点为电场驻波节点、磁场驻波腹点。此时电场的振幅值为

$$|E_1|_{\min}=|E_{i0}|(1-|\Gamma|) \tag{4.94}$$

而在 $2\beta_1 z_{\max}=-2(m+1)\pi(m=0,1,2\cdots)$ 处，即 $z_{\max}=-(2m+1)\lambda/4$ 处，电场的振幅出现极大值，磁场的振幅则出现极小值，因此称这些点为电场驻波腹点，磁场驻波节点。此时电场的振幅值为

$$|E_1|_{\max}=|E_{i0}|(1+|\Gamma|) \tag{4.95}$$

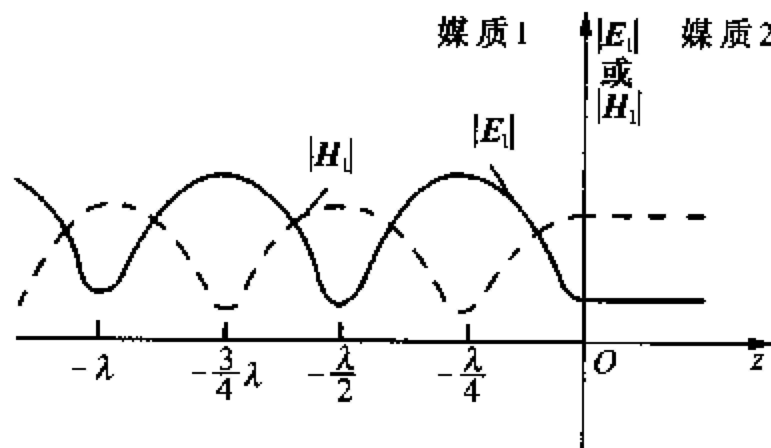


图 4.12 $|\boldsymbol{E}_1|$和$|\boldsymbol{H}_1|$随 z 的变化曲线

事实上，场的驻波的形式是由于媒质 1 中两个反向行波——入射波和反射波相互叠加引起的，在电场驻波节点处，反射波与入射波的电场的相位相反，因而合成波的电场出现极小值，在电场驻波腹点处，两者同相，从而形成电场振幅的极大值。此时，由于反射波的场的振幅比入射波的场的振幅小，反射波的场只与入射波的场中的一部分形成驻波，因而电场驻波节点处振幅不为零而其驻波腹点处振幅也不为 $2|E_{i0}|$。这种既有驻波成分又有行波成分形成的波称为行驻波（特别地，当第 2 种媒质为理想导体时，因 $\Gamma=-1$，$T=0$，故媒质 1 中合成波为纯驻波，此时场的驻波节点处振幅为零而其驻波腹点处振幅为 $2|E_{i0}|$）。

为反映行驻波状态的驻波成分的大小，定义电场振幅的极大值与极小值之比为电场的

驻波系数(或称驻波比),用 ρ 表示,即

$$\rho=\frac{|E|_{max}}{|E|_{min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{4.96}$$

因 $0\leqslant|\Gamma|\leqslant 1$,故 $1\leqslant\rho<\infty$。

媒质 1 中入射波向正 z 方向传输的平均功率流密度为

$$(\boldsymbol{S}_i)_{av}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i^*\right]=\boldsymbol{a}_z\frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} \tag{4.97}$$

而反射波的平均功率流密度为

$$(\boldsymbol{S}_r)_{av}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r^*\right]=-\boldsymbol{a}_z\frac{|\Gamma|^2|E_{i0}|^2}{2\eta_1}=-|\Gamma|^2(\boldsymbol{S}_i)_{av} \tag{4.98}$$

于是,媒质 1 中合成波向正 z 方向传输的平均功率流密度为

$$(\boldsymbol{S}_1)_{av}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1^*\right]=(\boldsymbol{S}_i)_{av}(1-|\Gamma|^2) \tag{4.99}$$

即媒质 1 中向正 z 方向传输的平均(传输)功率等于入射波的平均功率减去反射波的平均功率。媒质 2 中向正 z 方向透射的平均功率流密度为

$$(\boldsymbol{S}_2)_{av}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2^*\right]=\frac{\eta_1}{\eta_2}|T|^2(\boldsymbol{S}_i)_{av} \tag{4.100}$$

容易证明,$(\boldsymbol{S}_1)_{av}=(\boldsymbol{S}_2)_{av}$,即

$$1-|\Gamma|^2=\frac{\eta_1}{\eta_2}|T|^2 \tag{4.101}$$

这符合能量守恒定律。

例 4.5　一右旋圆极化波的电场强度复矢量为 $\boldsymbol{E}_i=(\boldsymbol{a}_x-j\boldsymbol{a}_y)E_0\mathrm{e}^{-j\beta z}$,由空气向一理想介质 $(\varepsilon_2=4\varepsilon_0,\ \mu_2=\mu_0)$ 平面 $(z=0)$ 垂直入射。① 写出反射波和透射波的电场强度复矢量表达式;② 求反射波和透射波相对于入射波的平均功率密度值。

解:① 因 $\eta_1=\eta_0$,$\eta_2=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2}=\eta_0/2$,故介质交界面处的反射系数、透射系数分别为

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=-\frac{1}{3},\quad T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2}{3}$$

则反射波和透射波的电场强度复矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_r=\Gamma\boldsymbol{E}_{i0}\mathrm{e}^{jk_1z}=\Gamma(\boldsymbol{a}_x-j\boldsymbol{a}_y)E_0\mathrm{e}^{jkz}=\frac{1}{3}(j\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_x)E_0\mathrm{e}^{jkz}$$

$$\boldsymbol{E}_t=T\boldsymbol{E}_{i0}\mathrm{e}^{-jk_2z}=T(\boldsymbol{a}_x-j\boldsymbol{a}_y)E_0\mathrm{e}^{-jk_2z}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}_x-j\boldsymbol{a}_y)E_0\mathrm{e}^{-j2kz}$$

其中 $k_2=2\pi/\lambda_2=2\pi\sqrt{\varepsilon_{r2}}/\lambda_0=4\pi/\lambda_0=2k$。

② 因 $(\boldsymbol{S}_i)_{av}=\boldsymbol{a}_z\dfrac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1}$,$(\boldsymbol{S}_r)_{av}=-\boldsymbol{a}_z\dfrac{|E_{r0}|^2}{2\eta_1}=-\boldsymbol{a}_z|\Gamma|^2\dfrac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1}$,$(\boldsymbol{S}_t)_{av}=\boldsymbol{a}_z|T|^2$

$\frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_2}$，故反射波和透射波相对于入射波的平均功率密度值分别为

$$\frac{(S_r)_{av}}{(S_i)_{av}} = |\Gamma|^2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{(S_t)_{av}}{(S_i)_{av}} = |T|^2 = \frac{8}{9}$$

4.5 全反射和全透射

4.5.1 全反射

由斯耐尔折射定律(4.69)可知，当 $n_1 > n_2$，即平面波从光密媒质入射到光疏媒质时，$\theta_t > \theta_i$。由于 θ_t 随 θ_i 的增大面增大，当 θ_i 增大到某一角度时使 $\theta_t = \pi/2$，此时若进一步增大 θ_i，则媒质 2 中将不会出现透射波，这样就发生了全反射。$\theta_t = \pi/2$ 时的入射角称为发生全反射的临界角，用 θ_c 表示。于是，由式(4.69)可得

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad 或 \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{4.102a}$$

对非磁性媒质，有

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{4.102b}$$

当 $\theta_i > \theta_c$ 时，$\sin\theta_i > \sin\theta_c$，由斯耐尔折射定律可知，$\sin\theta_t = n_1\sin\theta_i/n_2 > 1$，这意味着 θ_t 是一个虚数，不再是普通意义下平面波的透射角(即 θ_t 不存在实数解)。由于

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \pm j\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1} = \pm jA \tag{4.103}$$

式中，“+”意味着媒质 2 中透射波的振幅离开界面距离的增加按指数规律增大，违反了能量守恒定律，故上式中的“+”应被舍去。因此

$$\cos\theta_t = -jA \tag{4.104}$$

即使当 $\theta_i > \theta_c$ 时，斯耐尔反射定律仍成立，即反射角等于入射角。但此时垂直极化和平行极化情况下的反射系数却有不同的表达式。具体地，对垂直极化波，将式(4.104)代入式(4.81)，可得

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i + j\eta_1 A}{\eta_2\cos\theta_i - j\eta_1 A} \tag{4.105}$$

由于上式的分子、分母是共轭复数，故 $\Gamma_\perp$ 的模为 1，这意味着入射波在交界面上发生全反射。于是有

$$\Gamma_\perp = 1 \cdot e^{j\varphi_\perp} \tag{4.106}$$

式中，$\Gamma_\perp$ 的幅角 $\varphi_\perp$ 为

$$\varphi_{\perp} = 2\arctan\left[\frac{\eta_1\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}}{\eta_2\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \tag{4.107}$$

当两种媒质均是非磁性媒质时，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$，$n_1^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_0$ 以及 $n_2^2 = \varepsilon_2/\varepsilon_0$，因此，上式可被进一步简化为

$$\varphi_{\perp} = 2\arctan\left[\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \tag{4.108}$$

由此可见，当 $\theta_i > \theta_c$ 时，反射波的场的振幅等于入射波的场的振幅，这似乎意味着透射波的场总为零，事实上，这并不完全正确。为了看出这一点，让我们对媒质 2 中透射波的电磁场作进一步分析。利用式(4.75)，可写出透射波的电磁场表达式分别为

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{a}_y E_{i0} T_{\perp} \mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-j\beta_{2x}x} \tag{4.109}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{E_{i0}T_{\perp}}{\eta_2}(jA\boldsymbol{a}_x + \sin\theta_t\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-j\beta_{2x}x} \tag{4.110}$$

式中，A 和 $\sin\theta_t$ 分别由式(4.104)和式(4.103)给出，而

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i - j\eta_1 A} \tag{4.111}$$

$$\alpha_2 = \beta_2 A = \beta_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1} \tag{4.112}$$

$$\beta_{2x} = \beta_2\sin\theta_t = \beta_2\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \tag{4.113}$$

当 $\theta_i > \theta_c$ 时，透射系数 $T_{\perp}$ 并不为零，这表明即使入射波的场被全反射，但透射波的场并不为零。随着 z 的增加透射波的场的幅度按指数规律减小而相位不随 z 变化，这是衰变波所具有的特性。但场的这种衰变与媒质的损耗无关。更确切地说，波的衰变的发生是由于入射波出现全反射引起的。因为透射波的场随 z 迅速衰减，媒质 2 中的场主要集中在介质分界面附近，因此通常又将这种波称为表面波。

当全反射发生时，透射场的存在似乎违反了能量守恒定律，但事实上并非如此。为说明这个问题，写出媒质 2 中透射场的复波印亭矢量

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{H}_t^*) = \frac{|E_{i0}|^2 |T_{\perp}|^2}{2\eta_2}\mathrm{e}^{-2\alpha_2 z}(jA\boldsymbol{a}_z + \sin\theta_t\boldsymbol{a}_x) \tag{4.114}$$

由此可见，此矢量有 x 向和 z 向分量，但只有 x 向分量是实数量。这表明，在媒质 2 中净功率流与交界面平行，并非与之垂直。这一点与入射波和反射波场的振幅相等而没有净功率流进入媒质的事实相符。

类似地，对平行极化情况，当 $\theta_i > \theta_c$ 时，其反射系数可将式(4.104)代入式(4.86)得到，即

$$\Gamma_{/\!/} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} = -\frac{\eta_1\cos\theta_i + j\eta_2 A}{\eta_1\cos\theta_i - j\eta_2 A_1} = -1\cdot\mathrm{e}^{j\varphi_{/\!/}} \tag{4.115}$$

式中，
$$\varphi_{/\!/}=2\arctan\left(\frac{\eta_2 A}{\eta_1\cos\theta_i}\right)=2\arctan\left[\frac{\eta_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i-1}}{\eta_1\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \tag{4.116}$$

特别地，当两种媒质均是非磁性媒质时，式(4.116)可进一步简化为

$$\varphi_{/\!/}=2\arctan\left[\frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \tag{4.117}$$

可见，平行极化波的场也是衰变场，场的衰变速率与垂直极化情况相同，透射系数 $T_{/\!/}$ 为

$$T_{/\!/}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i-j\eta_2 A} \tag{4.118}$$

如前所述，既然没有功率流进入媒质 2，那么透射场是如何存在的呢？事实上，前面的分析过程是基于频域(谱域)的分析方法，频域分析法适用于稳态情况，即分析中忽略了波源激发该平面波瞬间所出现的瞬态响应(即暂态过程)。尽管达到稳态时，$|\Gamma|=1$，但初始的瞬态期间应有 $|\Gamma|<1$。透射场的稳态一旦形成，电磁能量就不再通过媒质 1，2 间的交界面进入媒质 2，从而媒质 2 中透射场的功率流只沿着平行于交界面的 x 方向传播。

4.5.2 全透射

从前面讨论可知，发生全反射与入射电场的极化特性无关，但发生全透射的条件则与波的极化特性有关。下面分别讨论垂直极化和平行极化的情形。

1) 垂直极化

如上所述，发生全透射时的入射角称为布儒斯特(Brewster)角，用 θ_B 表示。对垂直极化，由式(4.81a)，令 $\Gamma_\perp=0$ 及 $\theta_i=\theta_{B\perp}$，得

$$\eta_2\cos\theta_{B\perp}=\eta_1\cos\theta_t \tag{4.119}$$

又由斯耐尔折射定律可知

$$\cos\theta_t=\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i} \tag{4.120}$$

将上式代入式(4.119)，得

$$\sin^2\theta_{B\perp}=\frac{1-\frac{\mu_1\varepsilon_2}{\mu_2\varepsilon_1}}{1-\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2} \tag{4.121}$$

显然，对非磁性媒质，因 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$，故 $\theta_{B\perp}$ 不存在。但当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$，而 $\mu_1\neq\mu_2$ 时，有

$$\sin\theta_{B\perp}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\mu_1}{\mu_2}}} \tag{4.122}$$

这表明，当垂直极化波入射到两种不同电介质的交界面上时，任何入射角情况下都将有反射面不会发生全透射。尽管式(4.122)在理论上成立，但没有多大的实际意义。这是因为磁性媒质通常具有较高的损耗，在微波波段损耗则更大。

2) 平行极化

对平行极化，由式(4.86a)，令 $\Gamma_{/\!/}=0$ 及 $\theta_i=\theta_{B/\!/}$，得

$$\eta_2\cos\theta_t=\eta_1\cos\theta_{B/\!/} \tag{4.123}$$

将上式与式(4.120)联立求解，得

$$\sin^2\theta_{B/\!/}=\frac{1-\dfrac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}}{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2} \tag{4.124}$$

对非磁性媒质，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，则有

$$\theta_{B/\!/}=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}=\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{4.125}$$

由此可见，当由垂直极化波和平行极化波一起合成的波以布儒斯特角入射到两种非磁性媒质的交界面上时，反射波只有垂直极化成分。类似地，当圆极化波以布儒斯特角入射到两种电介质交界面上时，其反射波将变成线极化波，而透射波则变成椭圆极化波。基于这一原因，布儒斯特角又称为极化角。

4.6 平面波在多层介质表面上的垂直入射

不失一般性，考虑如图 4.13 所示媒质层数 n 为 3(即三层媒质)的情况。其中媒质 2 的厚度为 d，媒质 1 和媒质 3 分别处于 $z<-d$ 和 $z>0$ 的半无限大区域中。设媒质 1(①区)中有一沿 $+z$ 方向传播，(复)电场(强度)为 $\boldsymbol{E}_{1i}(=\boldsymbol{a}_xE_{1i}\mathrm{e}^{-j\beta_1(z+d)})$ 的均匀平面波入射到 $z=-d$ 的分界面上，则在该分界面上将产生沿 $-z$ 方向传播的电场为 $\boldsymbol{E}_{1r}^{(1)}(=\boldsymbol{a}_xE_{1r}^{(1)}\mathrm{e}^{j\beta_1(z+d)})$ 的反射波，并有一电场为 $\boldsymbol{E}_{2i}^{(1)}(=\boldsymbol{a}_xE_{2i}^{(1)}\mathrm{e}^{-j\beta_2z})$ 的透射波进入媒质 2(②区)。电场为 $\boldsymbol{E}_{2i}^{(1)}$ 的波传输至 $z=0$ 的分界面时，同样产生电场为 $\boldsymbol{E}_{2r}^{(1)}(=\boldsymbol{a}_xE_{2r}^{(1)}\mathrm{e}^{j\beta_2z})$ 的反射波和进入媒质 3(③区)的电场为 $\boldsymbol{E}_{3i}^{(1)}(=\boldsymbol{a}_xE_{3i}^{(1)}\mathrm{e}^{-j\beta_3z})$ 的透射波。媒质 2 中电场为 $\boldsymbol{E}_{2r}^{(1)}$ 的反射波传输至 $z=-d$ 的分界面时再次产生电场为 $\boldsymbol{E}_{1r}^{(2)}(=\boldsymbol{a}_xE_{1r}^{(2)}\mathrm{e}^{j\beta_1(z+d)})$ 的透射波和 $\boldsymbol{E}_{2i}^{(2)}(=\boldsymbol{a}_xE_{2i}^{(2)}\mathrm{e}^{-j\beta_2z})$ 的反射波。从界面 $z=$

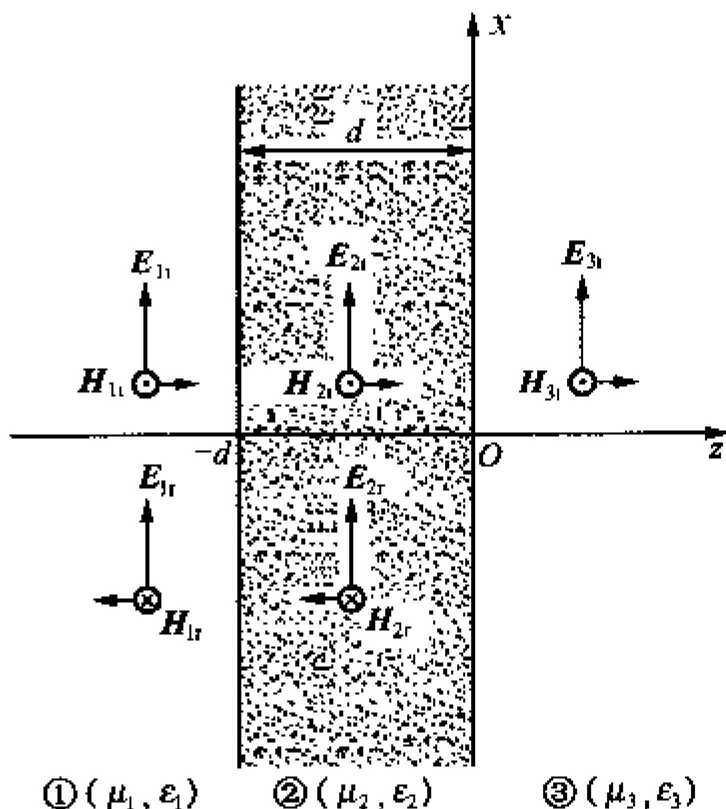


图 4.13 三层媒质表面的垂直入射

$-d$ 处反射，电场为 $\boldsymbol{E}_{2i}^{(2)}$ 的反射波传输至 $z=0$ 处的界面时将再次产生电场为 $\boldsymbol{E}_{2r}^{(2)}(=\boldsymbol{a}_x E_{2r}^{(2)} e^{j\beta_2 z})$ 的反射波和电场为 $\boldsymbol{E}_{3i}^{(2)}(=\boldsymbol{a}_x E_{3i}^{(2)} e^{-j\beta_3 z})$ 的透射波。依此类推，平面波在 $z=-d$ 及 $z=0$ 处的反射和透射过程无限地继续下去，从而使各媒质中总的复电、磁场强度分别为

① 区：
$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{1i}+\boldsymbol{E}_{1r}=\boldsymbol{a}_x[E_{1i}e^{-j\beta_1(z+d)}+(E_{1r}^{(1)}+E_{1r}^{(2)}+\cdots)e^{j\beta_1(z+d)}]$$
$$=\boldsymbol{a}_x[E_{1i}e^{-j\beta_1(z+d)}+E_{1r}e^{j\beta_1(z-d)}] \tag{4.126a}$$
$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_{1i}+\boldsymbol{H}_{1r}=\boldsymbol{a}_y\left(\frac{E_{1i}}{\eta_1}-\frac{E_{1r}}{\eta_1}\right)$$
$$=\boldsymbol{a}_y\frac{1}{\eta_1}[E_{1i}e^{-j\beta_1(z+d)}-(E_{1r}^{(1)}+E_{1r}^{(2)}+\cdots)e^{j\beta_1(z+d)}] \tag{4.126b}$$

② 区：
$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{2i}+\boldsymbol{E}_{2r}$$
$$=\boldsymbol{a}_x[(E_{2i}^{(1)}+E_{2i}^{(2)}+\cdots)e^{-j\beta_2 z}+(E_{2r}^{(1)}+E_{2r}^{(2)}+\cdots)e^{j\beta_2 z}] \tag{4.126c}$$
$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_{2i}+\boldsymbol{H}_{2r}=\boldsymbol{a}_y\left(\frac{E_{2i}}{\eta_2}-\frac{E_{2r}}{\eta_2}\right)$$
$$=\boldsymbol{a}_y\frac{1}{\eta_2}[(E_{2i}^{(1)}+E_{2i}^{(2)}+\cdots)e^{-j\beta_2 z}-(E_{2r}^{(1)}+E_{2r}^{(2)}+\cdots)e^{j\beta_2 z}] \tag{4.126d}$$

③ 区：
$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{a}_x(E_{3i}^{(1)}+E_{3i}^{(2)}+\cdots)e^{-j\beta_3 z} \tag{4.126e}$$
$$\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{a}_y\frac{1}{\eta_3}(E_{3i}^{(1)}+E_{3i}^{(2)}+\cdots)e^{-j\beta_3 z} \tag{4.126f}$$

式中，E_{1i}是已知量，E_{1r}，E_{2i}，E_{2r}，E_{3i}是未知量。在两个分界面上，相应区域中的电场和磁场的切向分量必连续，由分界面处的四个边界条件即可确定四个未知量。

在 $z=0$ 处，由边界条件可得

$$\left.\begin{aligned}(E_{2i}+E_{2r})&=E_{3i}\\ \frac{1}{\eta_2}(E_{2i}-E_{2r})&=\frac{1}{\eta_3}E_{3i}\end{aligned}\right\} \tag{4.127}$$

上两式相除，有

$$\eta_2\frac{E_{2i}+E_{2r}}{E_{2i}-E_{2r}}=\eta_3$$

于是，在 $z=0$ 处分界面上的反射系数为

$$\Gamma_2(z)\big|_{z=0}=\Gamma_2(0)=\frac{E_{2r}}{E_{2i}}=\frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_2+\eta_2} \tag{4.128}$$

在 $z=-d$ 处，由边界条件，有

$$\left.\begin{aligned}(E_{1i}+E_{1r})&=E_{2i}[e^{j\beta_2 d}+\Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d})]\\ \frac{1}{\eta_1}(E_{1i}-E_{1r})&=\frac{E_{2i}}{\eta_2}[e^{j\beta_2 d}-\Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}]\end{aligned}\right\} \tag{4.129}$$

上两式相除，有

$$\eta_1\frac{E_{1i}+E_{1r}}{E_{1i}-E_{1r}}=\eta_2\frac{e^{j\beta_2 d}+\Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}}{e^{j\beta_2 d}-\Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}} \tag{4.130}$$

为了便于分析多层介质表面的垂直入射问题，下面引出输入波阻抗的概念。

所谓输入波阻抗，是指平行于多层介质平面分界面处总的切向电场的复振幅与总的切向磁场的复振幅之比，记为 Z，即

$$Z=\pm\frac{E_t}{H_t} \tag{4.131}$$

式中，"+"、"-"对应于波的传播方向与 $\boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{H}_t$ 之间满足右、左手螺旋关系。于是，由式(4.130)可得 $z=-d$ 处的输入波阻抗为

$$\begin{aligned}Z_1(-d)&=\frac{E_{1x}}{H_{1y}}\bigg|_{z=-d}=\eta_2\frac{e^{j\beta_2 d}+\Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}}{e^{j\beta_2 d}-\Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}}\\&=\eta_2\frac{\eta_3+j\eta_2\tan\beta_2 d}{\eta_2+j\eta_3\tan\beta_2 d}\end{aligned} \tag{4.132}$$

输入波阻抗的定义对 $n\geqslant 1$ 情况均适用。具体地，对 $n=1$（单一媒质的情况），若波沿 $+z$ 向传播，则输入波阻抗 Z 恒等于媒质的本征阻抗，即 η；若波沿 $-z$ 向传播，则输入波阻抗 Z 恒等于媒质的本征阻抗的负值，即 $-\eta$。如对图 4.13 的媒质 3，若透射波沿 $+z$ 向传播，则其中任一 $z=\text{const.}$ 处的输入波阻抗 Z_3 为

$$Z_3=\frac{E_{3t}}{H_{3t}}=\eta_3 \tag{4.133}$$

对 $n=2$（双层媒质）的情况，如图 4.14(a)所示。当平面波从媒质 1 垂直入射到平面交界面上时，由式(4.126)或式(4.91)，有

$$\left.\begin{aligned}E_{1x}&=E_{1i}(e^{-j\beta_2 z}+\Gamma_1 e^{j\beta_2 z})\\H_{1y}&=\frac{E_{1i}}{\eta_1}(e^{-j\beta_2 z}-\Gamma_1 e^{j\beta_2 z})\end{aligned}\right\} \tag{4.134}$$

式中，$\Gamma_1=\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$。于是，媒质 1 的输入波阻抗为

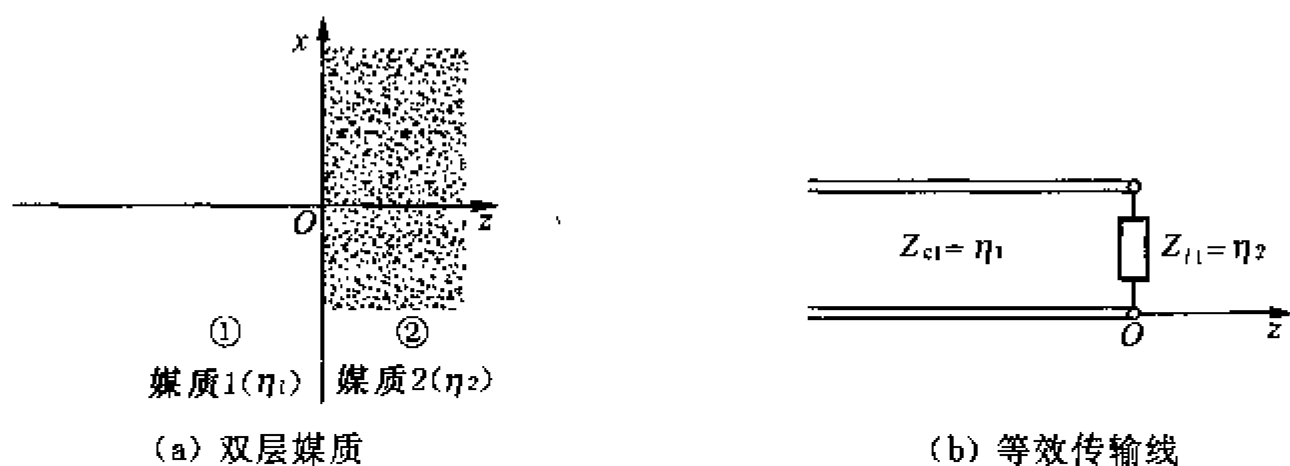
$$Z_1(z)=\eta_1\frac{e^{-j\beta_2 z}+\Gamma_1 e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 d}-\Gamma_1 e^{j\beta_2 z}}=\eta_1\frac{\eta_2-j\eta_1\tan\beta_1 z}{\eta_1-j\eta_2\tan\beta_1 z} \tag{4.135}$$

若取 $z=-d$，则

$$Z_1(z)\big|_{z=-d}=\eta_1\frac{\eta_2+j\eta_1\tan\beta_1 d}{\eta_1+j\eta_2\tan\beta_1 d} \tag{4.136}$$

式中，β_1 是媒质 1 中的相移常数。应指出，对上述双层媒质的情况，媒质 1 中输入波阻抗的计算可等效为如图 4.14(b)所示的均匀无耗传输线（本书下册第 2 章中介绍）的输入阻抗的计算问题，其中 Z_{l1} 为传输线的负载阻抗，表示媒质 1 的负载阻抗；Z_{c1} 为传输线的特性阻抗，表示媒质 1 的本征阻抗。这表明，对①区的入射波而言，②区的作用就相当于在媒质交界面处接一个输入波阻抗为 η_2 的媒质。

同理，对如图 4.15(a)所示 $n=3$ 的情况，因媒质 2 和媒质 3 交界面（$z=0$）处的输入波阻抗为 η_3，可视为媒质 2 的负载阻抗，即 $Z_{l2}=Z_2(0)=\eta_3$，故其均匀无耗传输线的等效电



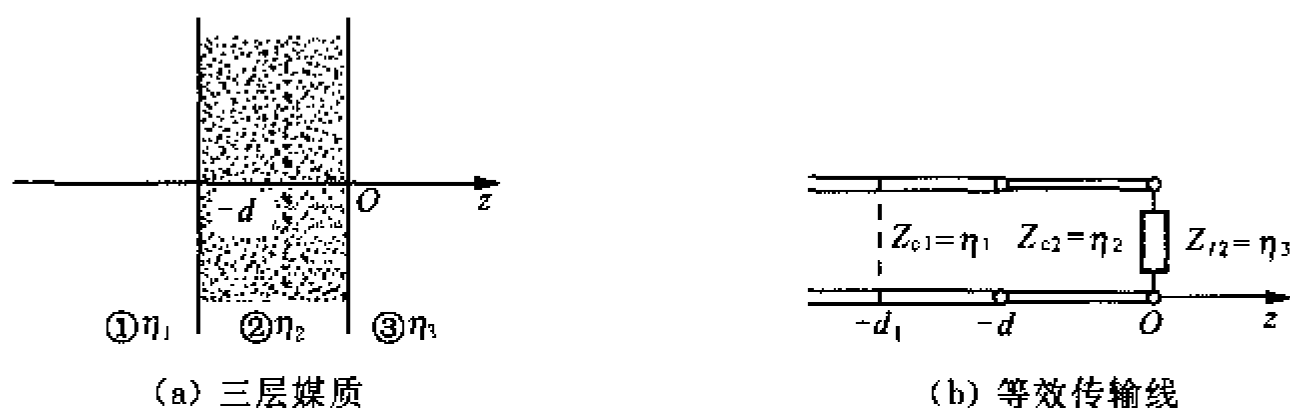
(a) 双层媒质　　(b) 等效传输线

图 4.14　双层媒质及其等效传输线

路如图 4.15(b)所示。于是，媒质 2 的总输入波阻抗 $Z_1(-d)$可由式(4.136)得到，即

$$Z_1(-d)=\eta_2\frac{Z_{l2}+j\eta_2\tan\beta_2 d}{\eta_2+jZ_{l2}\tan\beta_2 d}=\eta_2\frac{\eta_3+j\eta_2\tan\beta_2 d}{\eta_2+j\eta_3\tan\beta_2 d}\tag{4.137}$$

这同式(4.132)利用边界条件得到的输入波阻抗的表达式完全相同。



(a) 三层媒质　　(b) 等效传输线

图 4.15　三层媒质及其等效传输线

显然，在 $z=-d$ 处的反射系数 $\Gamma_1(-d)$为

$$\Gamma_1(-d)=\frac{Z_1(-d)-\eta_1}{Z_1(-d)+\eta_1}\tag{4.138}$$

而 $z=-d$ 处的功率反射系数为$|\Gamma_1(-d)|^2$。类似地，若要求 $z=-d_1(d_1>d)$ 处的输入波阻抗，则可将 $Z_1(-d)$视为媒质 1 的负载阻抗 Z_{l1}，并将式(4.136)中的 η_2 换成 $Z_{l1}=Z_1(-d)$，得

$$Z_1(-d_1)=\eta_1\frac{Z_{l1}+j\eta_1\tan\beta_1(d_1-d)}{\eta_1+jZ_{l1}\tan\beta_1(d_1-d)}\tag{4.139}$$

式中，$Z_{l1}=Z_1(-d)$ 由式(4.137)提供。

一般地，对具有 $(n+1)$ 层媒质(即具有 n 个平面分界面)的情况，媒质 i 的输入波阻抗为

$$Z_i(-d_i)=\eta_i\frac{Z_{li}+j\eta_i\tan\beta_i(d_i-d_{i-1})}{\eta_i+jZ_{li}\tan\beta_i(d_i-d_{i-1})}\tag{4.140}$$

这样，若已知多层媒质最后一层的本征阻抗为 η_n，令 η_n 为上式中的 $Z_{li}(=Z_{l(n-1)}=Z_{(n-1)}(0))$，反复列出各媒质分界面处以及各媒质中任一点处输入波阻抗的表达式，即可依

次计算出各媒质中相应点处的输入波阻抗和反射系数。

实际中三层媒质较为常见，并有以下两种重要应用。

(1) 半波介质夹层

在三层(电)介质中，若 $\eta_1 = \eta_2$，且夹在介质 1 和介质 3 中的介质层 2 的厚度为该层中平面波波长 λ_2 的半整数倍，即 $\beta_2 d = m\pi$，或 $d = m\lambda_2/2$，$m = 1, 2, 3, \cdots$，则由式(4.137)，可得

$$Z_1(-d) = Z_{l1} = \eta_3 = \eta_1$$

于是，$\Gamma_1(-d) = 0$。这表明半波介质夹层的存在，并不在介质 1 中引起反射。这是因为输入分界面处的波阻抗与输出分界面处的波阻抗相等。

(2) 消除反射的四分之一波长介质层

在三层(电)介质中，若在介质 1 和介质 3 之间放置厚度为 $\lambda_2/4$ 的介质层，且厚度为 $\lambda_2/4$ 介质层的本征阻抗是两边介质的本征阻抗的几何平均值，便可消除电磁波由介质 1 向介质 2 传播时在其交界面处引起的反射。事实上，因 $d = \lambda_2/4$，故 $\beta_2 d = \pi/2$。又由假设 $\eta_2 = \sqrt{\eta_1\eta_3}$，于是，$Z_1(-d) = Z_{l1} = \eta_2^2/\eta_3 = \eta_1$，从而 $\Gamma_1(-d) = 0$。

习　题

4-1　设自由空间中有一电场强度复矢量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_0 e^{-jkx}$。

① $\boldsymbol{E}$ 是否满足自由空间的齐次矢量亥姆霍兹方程？

② $\boldsymbol{E}$ 是否表示自由空间中存在的电磁波？为什么？

4-2　一均匀平面波在空气中沿 $+z$ 向传播，其电场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_x = \boldsymbol{a}_x 5\times10^{-4}\cos\left(2\times10^7\pi t - k_0 z + \frac{\pi}{4}\right)\text{V/m}$$

① 写出磁场强度的瞬时表达式；

② 求波数 k_0 的值以及 $t = 3$ ms 时 $E_x = 0$ 的位置。

4-3　自由空间中，已知一平面波的电磁场强度为 $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{a}_x 60\pi\cos(10^8\pi t + kz)$ V/m，$\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{a}_y H_0\cos(10^8\pi t + kz)$ A/m。试确定 H_0 及 $k(k > 0)$。

4-4　已知自由空间中一平面波的电场强度 $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{a}_y E_0\sin(\omega t - kz)$。

① 求磁通量密度和磁场强度的瞬时表达式；

② 画出 $t = 0$ 时刻 $\boldsymbol{E}(t)$ 和 $\boldsymbol{H}(t)$ 随 z 的变化曲线。

4-5　在填充理想介质 ($\mu_r = 1$) 的空间中，已知一均匀平面波的电磁场强度为 $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{a}_z 60\pi\cos(\omega t - 0.8y)$ V/m，$\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{a}_x 2.0\cos(\omega t - 0.8y)$ A/m。试确定 ε_r 和 ω。

4-6　自由空间中同时存在两个时谐电磁场，其电场强度复矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_x E_{10} e^{-jk_1 z},\ \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{a}_x E_{20} e^{-jk_2 z}$$

证明空间中总的平均电磁场功率密度等于两个时谐场的平均电磁场功率密度之和。

4-7　一工作频率 $f = 300$ MHz 的平面波在导电媒质 ($\varepsilon_r = 15$，$\mu_r = 1$，$\sigma = 3.0$ mS/m) 中

沿正 z 方向传播。已知沿 x 方向极化的此平面波在 $z=0$ 处的幅值为377 mV/m。

① 求媒质的本征阻抗、衰减常数、传播常数、趋肤深度、波的波长和相速；

② 写出媒质中任一 z 处的电场强度、磁场强度的瞬时表达式以及平均功率密度。

4-8 假设铜导体与下半空间的平面交界面位于 $z=0$ 处，在下半空间 ($z<0$) 中有一工作频率 $f=100\,\text{MHz}$ 的平面波存在，其交界面处的电磁场强度为 $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_x 2.0\cos\omega t$ V/m。求铜导体存在的区域 ($z>0$) 内距离交界面 $z=6.61\,\mu\text{m}$ 和 $z=33\,\mu\text{m}$ 处电场强度幅值占 $z=0$ 处幅值的百分比。

4-9 已知一平面波的工作频率为 100 MHz 时，石墨的穿透深度为 0.16 mm。

求：① 石墨的电导率；

② 工作频率为 100 GHz 的平面波在石墨中传播多少距离时，其场的振幅衰减了 20 dB?

4-10 已知一平面波在电参数为 ε, μ, σ 的导电媒质中传播，此平面波的瞬时电场 $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_y E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi)$。

求：① 电磁场强度复矢量以及磁场强度的瞬时矢量；

② 瞬时电、磁场能量密度以及总的电磁场能量密度；

③ 平均电、磁场能量密度以及总的平均电磁场能量密度；

④ 瞬时坡印亭矢量以及平均能流密度矢量。

4-11 真空中，一均匀平面波的电磁场强度 $\boldsymbol{E}(t)=1.2(\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y\sqrt{3})\cos[1.2\times10^9\pi t-\pi(3x+\sqrt{3}y+2z)]$ V/m。

① 求此平面波的波长、相移常数、传播方向上的单位矢量；

② 求此平面波的平均功率流密度和平均电磁场能量密度。

4-12 试根据以下平面波的电场强度的表达式，确定平面波的传播方向及其极化方式：

① $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_x 10\cos(10^8\pi t-y)-\boldsymbol{a}_z 5\sin(10^8\pi t-y)$；

② $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_y 3\cos(\omega t-\beta x-30^\circ)-\boldsymbol{a}_z 4\cos(\omega t-\beta x+60^\circ)$；

③ $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j100z}-\boldsymbol{a}_x 3e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j100z}$；

④ $\boldsymbol{E}=E_0(6j\boldsymbol{a}_x-2\sqrt{15}\boldsymbol{a}_y+4j\boldsymbol{a}_z)e^{-jk(2x-3z)}$。

4-13 工作频率为 10 kHz 的平行极化波在空气中以入射角 $\theta_i=88^\circ$ 斜入射至海面上，已知海水的电参数为 $\epsilon=81\epsilon_0$，$\mu=\mu_0$，$\sigma=4$ S/m。

① 求透射角 θ_t；

② 求传输系数 $T_{/\!/}$；

③ 求 $(S_t)_{av}/(S_i)_{av}$；

④ 若此平面波的场强衰减了 30 dB，则此波在海平面下传播了多少距离？

4-14 已知一垂直极化波以 30°的入射角从媒质 1 ($\varepsilon_{r1}=9.6$, $\mu_{r1}=1$, $\sigma_1=0$) 入射到媒质 2(真空)中，入射波的电场强度的幅值 $E_{i0}=5\mu$ V/m。求反射波、透射波的电场强度和磁场强度的幅值 E_{r0}，E_{t0}，H_{r0} 以及 H_{t0}。

4-15 真空中，一平面波的电磁场强度 $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{a}_x 20\sin(2\times10^8\pi t+\beta z)+\boldsymbol{a}_y 50\cos(2\times10^8\pi t+\beta z)$ mV/m。

求：① 磁场强度的瞬时及复数表达式；

② 传播常数。

4-16　一沿 x 方向极化，工作频率 $f = 300\,\text{MHz}$ 的平面波沿 $+z$ 向传播，且已知此平面波的电场强度的幅值为 10 mV/m，此平面波从空气垂直入射到空气-理想介质的平面交界面 $(z = 0)$ 上，理想介质的电参数为 $\epsilon = 4\epsilon_0$，$\mu = \mu_0$。

求：① 此平面波的反射系数、透射系数以及驻波比；

② 空气和理想介质中入射波、反射波和透射波的电场强度和磁场强度复矢量的表达式；

③ 入射波、反射波和透射波的平均功率流密度。

4-17　空气中，一沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波正入射到 $z = 0$ 处的理想导电平面上，其入射波的电场强度瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}_{\text{i}} = \boldsymbol{a}_x E_{x0}\cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_y E_{y0}\sin(\omega t - \beta z)\ \text{V/m}$$

① 写出入射波的电场强度复矢量的表达式；

② 写出入射波的磁场强度瞬时矢量的表达式；

③ 求出入射波、反射波和透射波的平均功率流密度矢量；

④ 导出 $z < 0$ 空间中合成波的电场强度和磁场强度复矢量及理想导电平面上感应面电流密度的表达式。

4-18　真空中有一厚度 $d = 5\,\mu\text{m}$ 的铜板，电场强度的振幅为 10 V/m 的平面波垂直入射到空气与铜板的交界面上。若平面波的工作频率 $f = 100\,\text{MHz}$，求真空和铜板中反射波、透射波的电场强度的振幅值。

4-19　一圆极化波从理想电介质 1 斜入射到理想电介质 1 与理想电介质 2 的平面交界面上。

① 确定 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ 和 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ 两种情况下，理想电介质 1 中的反射波和理想电介质 2 中的透射波的极化方式；

② 当 $\epsilon_2 = 9\epsilon_1$ 时，欲使反射波为线极化波，其入射角应为多少？

4-20　一均匀平面波从自由空间垂直入射到某介质平面 $z = 0$ 时，在自由空间形成行驻波，已知其驻波比为 2.7，且介质平面上出现波节点。求介质的介电常数。

4-21　一平行极化波以 75°的布儒斯特角由一理想介质入射到空气中，求此介质的相对介电常数。

4-22　一工作频率为 100 MHz 的垂直极化波以 60°的入射角从淡水 $(\epsilon_r = 80,\ \sigma \approx 0)$ 中入射到淡水和空气的平面交界面 $(z = 0)$ 上。

① 求出淡水和空气交界面处的反射系数；

② 导出空气中电场强度的复数表达式；

③ 写出空气中复坡印亭矢量的表达式。

4-23　空气中，有一波长极短的圆极化波斜入射至玻璃制 $(\epsilon_r = 3,\ \sigma = 0)$ 的直角三角形棱镜的斜面 AC 上，其截面如图 4.16 所示。已知 $\theta_i = 60°$ 以及入射波的平均功率密度为 1 W/m²，求棱镜直角边上透射的波的平均功率密度为多少？

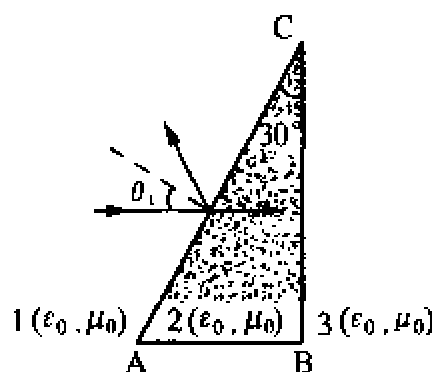


图 4.16　题 4-23 附图

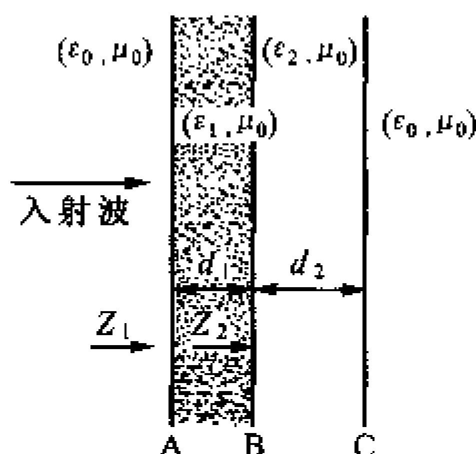


图 4.17　题 4-24 附图

4-24　一工作频率为 5 GHz 的平面波从空气垂直入射到两层不同的非磁性媒质构成的介质板上，如图 4.17 所示。已知两层介质的介电常数分别为 $\varepsilon_1=9\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$，厚度分别为 $d_1=2.5\ \text{mm}$，$d_2=7.5\ \text{mm}$。

① 问反射回空气的反射波平均功率密度为入射波平均功率密度的百分之几？

② 若入射波的工作频率变为 10 GHz，则反射波的平均功率密度又为入射波平均功率密度的百分之几？

4-25　某雷达的工作频率为 3 GHz，现用相对介电常数为 2.8 的理想电介质平板做一天线罩。

① 介质平板的厚度 d 为多少时不出现反射？

② 若雷达的工作频率变为 3.1 GHz 或 2.9 GHz 时，反射系数变为多少？

4-26　在半无限大的玻璃块的平面上涂一层薄膜以消除红外线 ($\lambda=0.75\ \mu\text{m}$) 的反射，已知玻璃与薄膜均为理想电介质，且玻璃的相对介电常数为 6.25。

求：① 薄膜的相对介电常数 ε_r 和厚度 d；

② 薄膜对紫外线 ($\lambda=0.38\ \mu\text{m}$) 的反射系数的大小。

4-27　如图 4.18 所示，一均匀平面波从介质 1 垂直入射到多层理想电介质的平面交界面 A 上，各区域中介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$，$\varepsilon_3=16\varepsilon_0$，介质 2 的厚度 $d=\lambda_2/3$。已知此平面波的电场强度瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x 50\cos(2\times10^8\pi t-2.094z)\ \ \mu\text{V/m}$$

求：① 分界面 A 上的反射系数；

② 介质 1 中的平均功率流密度矢量。

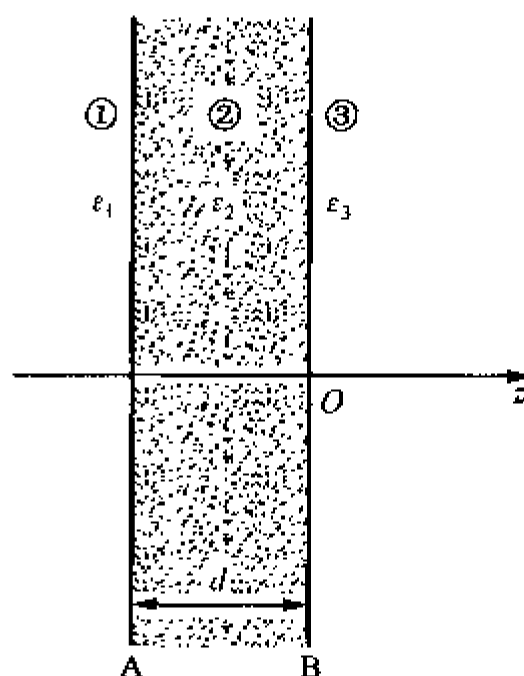


图 4.18　题 4-27 附图

第 5 章

规则传输系统 I——导行电磁波

前一章研究了平面电磁波在无限大媒质中传输及其在多层半无限大媒质的平面交界面上反射和透射的问题。电磁波除了在无限空间或半无限空间中传输外，还可以在空心金属波导管、同轴线等装置中传输，这种电磁波称为导行电磁波，简称为导(行)波。能够传输导波的装置称为传输系统(或导波系统)。传输系统的横截面的形状、尺寸以及填充媒质的电参数和分布状态都不随系统的轴线(纵轴)方向变化的无限长的平直传输系统叫做规则传输系统(或称规则导波系统)。本章要讨论的传输系统就是规则传输系统。

微波技术中常用的传输系统是由单根或多根相互平行的空心或实心的柱形导体或介质

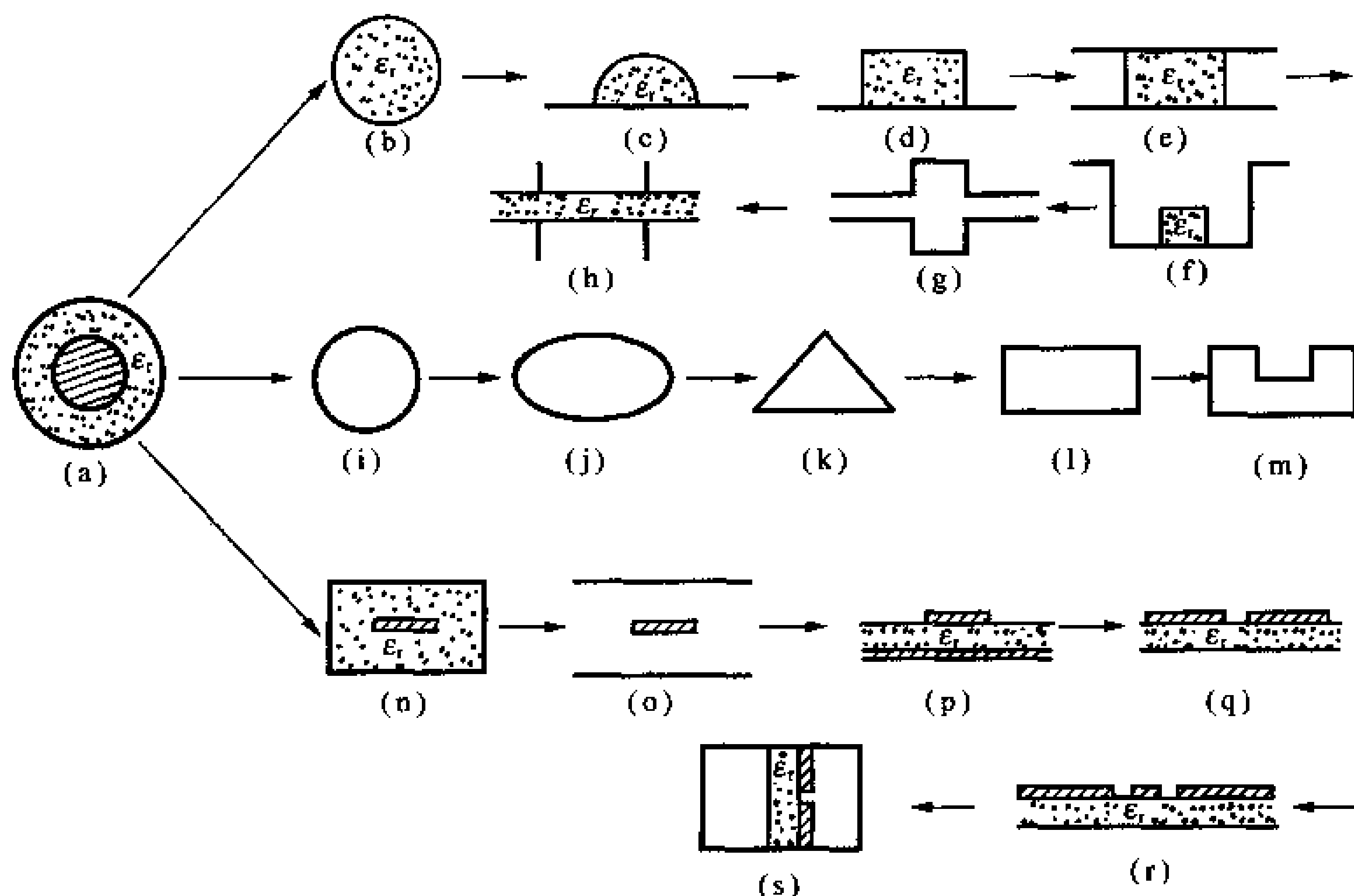


图 5.1　传输系统(横截面)的演变

(a) 同轴线；(b) 圆形介质波导；(c) 半圆形镜像介质波导；(d) 矩形镜像介质波导；(e) H 波导；(f) 陷入式镜像介质波导；(g) G 波导；(h) 栅栏波导；(i) 圆形(金属)波导；(j) 椭圆形(金属)波导；(k) 三角形(金属)波导；(l) 矩形(金属)波导；(m) 脊形波导；(n) 同轴带状线；(o) 带状线；(p) 微带线；(q) 槽线；(r) 共面波导；(s) 鳍线

组成，可分为以下四类：(1)TEM 模传输线：它由两根以上平行导体构成，通常工作在主模——横电磁模(即 TEM 模)，如平行双导线、同轴线等。这种传输线也可传输 TM 模或 TE 模；(2)金属波导：它由单根封闭的柱形导体管构成，其工作模式可分为横磁(TM)模和横电(TE)模两大类，如矩形波导、圆形波导等；(3)准 TEM 模和非 TEM 模传输线：它们也由两根或两根以上平行导体构成，但却不能工作于纯 TEM 模。工作主模是准 TEM 模的传输线有微带线、共面波导等，工作于非 TEM 模的传输线有槽线和鳍线；(4)表面波传输系统：它由单根介质或敷介质层的导体构成，电磁波沿其表面传播。这类传输系统的工作模式是混合模，即 TM 模和 TE 模的叠加，但在有些情况下，也可传输 TM 模、TE 模或 TEM 模。这类传输系统有矩形介质波导、圆形介质波导以及镜像介质波导等。实际上，除平行双导线外。其他传输系统均可看作是从同轴线演变而来。图 5.1 示出了部分传输系统的演变过程。

下面首先从规则传输系统中的电磁场方程出发，介绍规则传输系统中导波的一般特性；然后讨论矩形波导中导波的传输特性以及传输主模的特点；最后介绍同轴线中导波的传输特性。

5.1 柱形传输系统中的导波及其特性

5.1.1 柱形传输系统中的电磁场

为了得到规则传输系统中电磁场的普遍关系式，常采用如图 5.2 所示的(广义)正交柱坐标系。在这种坐标系中有一个坐标是直角坐标，定为 z，z 轴与规则传输系统的轴线相重合；u，v 是规则传输系统横截面上的曲线坐标。显然直角坐标系和圆柱坐标系是正交柱坐标系的特例。分析正交坐标系下规则传输系统的常用方法有两种：纵向场法和赫兹矢量位法，这里只讨论纵向场法。

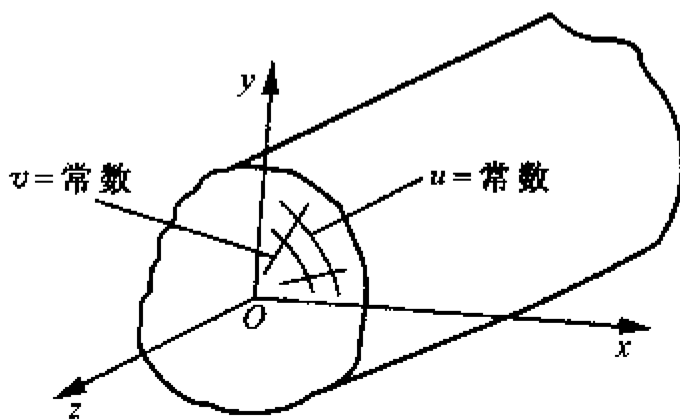


图 5.2 规则柱形传输系统及其坐标系

所谓纵向场法，就是根据规则传输系统的边界形状和尺寸沿其轴向不变的特点，从电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 所满足的矢量亥姆霍兹方程中分离出只含电场纵向分量和磁场纵向分量的标量亥姆霍兹方程，利用边界条件求出电场和磁场的纵向分量，再利用纵向场分量求出电磁场的各个横向分量。

为简单起见，假定规则传输系统内填充的媒质是均匀、线性、各向同性的，传输系统内无自由电荷和传导电流存在，且传输系统内的场为时谐场，则在正交柱坐标系中，规则传输系统内的复矢量 $\boldsymbol{E}(u, v, z)$ 和 $\boldsymbol{H}(u, v, z)$ 应分别满足式(2.101)中的两个齐次矢量亥姆霍兹方程，即

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(u, v, z) + k^2 \boldsymbol{E}(u, v, z) = 0 \tag{5.1a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(u, v, z) + k^2 \boldsymbol{H}(u, v, z) = 0 \tag{5.1b}$$

再将正交柱坐标系中的电场和磁场分解为横向分量和纵向分量，即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(u,v,z) &= \boldsymbol{E}_t(u,v,z) + \boldsymbol{a}_z E_z(u,v,z)\\ \boldsymbol{H}(u,v,z) &= \boldsymbol{H}_t(u,v,z) + \boldsymbol{a}_z H_z(u,v,z)\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

将式(5.2)代入式(5.1),可得

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \tag{5.3a}$$

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \tag{5.3b}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_t + k^2 \boldsymbol{E}_t = 0 \tag{5.4a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}_t + k^2 \boldsymbol{H}_t = 0 \tag{5.4b}$$

由此可见,在正交柱坐标系中电场的纵向分量、横向分量以及磁场的纵向分量、横向分量分别满足标量、矢量亥姆霍兹方程。一般说来,式(5.4)的任一个矢量亥姆霍兹方程不能再分解成形如式(5.3)那样的两个标量亥姆霍兹方程,只有在直角坐标系下才能实现这种分解。因此,通常都先从 E_z 和 H_z 满足的标量亥姆霍兹方程和特定边界条件所构成的定解问题中求出 E_z 和 H_z,然后再由 E_z 和 H_z 求出横向分量 $\boldsymbol{E}_t$ 和 $\boldsymbol{H}_t$。

在正交坐标系中,因坐标 z 对应的度量因子 $h_3=1$,而坐标 u,v 所对应的度量因子 h_1,h_2 与坐标 z 无关,即

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(h_1 h_2) = 0 \tag{5.5}$$

故有

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.6}$$

式中,∇_t^2 称为横向拉普拉斯算子。将方程(5.3a)分离变量,令

$$E_z(u,v,z) = E_z(u,v)Z(z) = E_z(T)Z(z) \tag{5.7}$$

将式(5.7)和式(5.6)代入方程(5.3a)并整理,可得

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{1}{E_z(T)}(\nabla_t^2 + k^2)E_z(T) \tag{5.8}$$

上式左端是 z 的函数,与 u,v 无关;右端是 u,v 的函数,与 z 无关,显然只有左、右两端都等于某一常数时该式才能成立。令此常数为 γ^2,则得

$$\nabla_t^2 E_z(T) + (k^2 + \gamma^2)E_z(T) = 0 \tag{5.9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 Z(z) = 0 \tag{5.9b}$$

以同样的方法,可得 H_z 的两个方程为

$$\nabla_t^2 H_z(T) + (k^2 + \gamma^2)H_z(T) = 0 \tag{5.10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 Z(z) = 0 \tag{5.10b}$$

若在(5.9)和(5.10)两方程中,令 $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$,则有

$$\nabla_t^2 E_z(T) + k_c^2 E_z(T) = 0 \tag{5.11a}$$

$$\nabla_t^2 H_z(T) + k_c^2 H_z(T) = 0 \tag{5.11b}$$

在图 5.2 所示的正交柱坐标系中，∇_t^2 为

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]$$

将上式代入式(5.11)得

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)\right] + k_c^2 \Psi = 0 \tag{5.12}$$

式中，Ψ 可以是 $E_z(T)$ 和 $H_z(T)$ 中的任意一个。

方程(5.9)和(5.10)是同一方程，此方程决定了电磁场沿传输系统轴向的分布特性，其通解为

$$Z(z) = A^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + A^- \mathrm{e}^{\gamma z} \tag{5.13a}$$

式中，$A^+\mathrm{e}^{-\gamma z}$ 和 $A^-\mathrm{e}^{\gamma z}$ 分别表示沿传输系统的正 z 方向传输的入射波和负 z 方向传输的反射波；A^+ 和 A^- 为待定常数。式(5.13a)可写为以下形式：

$$Z(z) = A^{\pm}\mathrm{e}^{\mp\gamma z} \tag{5.13b}$$

因规则传输系统为无限长，没有反射波，故 $A^- = 0$。于是有

$$Z(z) = A^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.13c}$$

上式表明，导波的电场和磁场沿 z 按指数规律变化，变化的特点取决于 γ。当 γ 为实数时，场的振幅沿 z 按指数规律变化，相位沿 z 不变；当 γ 为虚数时，场的振幅沿 z 不变化，而相位沿 z 变化；当 γ 为复数时，场的振幅和相位沿 z 均发生变化。因此，当 γ 为实数时，导波处于截止状态；γ 为复数和虚数时，导波则处于传输状态。所以，γ 为导波的传播常数。传播常数为复数时，也可表示为 $\gamma = \alpha + j\beta$。其中 α 为衰减常数，β 为相移(相位)常数。特别地，若传输系统无耗，则 $\gamma = j\beta$。

至此，根据具体传输系统的边界条件，就可从方程(5.12)求出 $E_z(T)$，将它与式(5.13c)代入式(5.7)，即可得到规则传输系统中导波的纵向电场分量 $E_z(u, v, z)$，再乘以时间因子 $\mathrm{e}^{j\omega t}$ 取实部，即可得到瞬时场量 $E_z(u, v, z, t)$。同样也可得到 $H_z(u, v, z, t)$。至于方程(5.12)的具体求解，将在本章 5.3 和 5.4 节结合具体传输系统进行讨论。

对于电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的横向分量，不必再去求解方程(5.4)。事实上，场的某个横向分量所满足的方程一般是较为复杂的二阶偏微分方程，求解较为困难。为了得到导波的横向分量的表达式，将无源的麦克斯韦方程组中的两个旋度方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}$$

在图 5.2 所示的正交柱坐标系中展开，并经过适当整理，得

$$E_u = -\frac{1}{k_c^2}\left(\frac{j\omega\mu}{h_2}\frac{\partial H_z}{\partial v} + \frac{\gamma}{h_1}\frac{\partial E_z}{\partial u}\right) \tag{5.14a}$$

$$E_v = \frac{1}{k_c^2}\left(\frac{j\omega\mu}{h_1}\frac{\partial H_z}{\partial u} - \frac{\gamma}{h_2}\frac{\partial E_z}{\partial v}\right) \tag{5.14b}$$

$$H_u = \frac{1}{k_c^2}\left(\frac{j\omega\varepsilon}{h_2}\frac{\partial E_z}{\partial v} - \frac{\gamma}{h_1}\frac{\partial H_z}{\partial u}\right) \tag{5.14c}$$

$$H_v = -\frac{1}{k_c^2}\left(\frac{j\omega\varepsilon}{h_1}\frac{\partial E_z}{\partial u} + \frac{\gamma}{h_2}\frac{\partial H_z}{\partial v}\right) \tag{5.14d}$$

若令 $\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{a}_u E_u + \boldsymbol{a}_v E_v$，$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{a}_u H_u + \boldsymbol{a}_v H_v$，则可将上式写成下述更简洁的形式：

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{1}{k_c^2}[-\gamma \nabla_t E_z + j\omega\mu \boldsymbol{a}_z \times (\nabla_t H_z)] \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{H}_t = -\frac{1}{k_c^2}[\gamma \nabla_t H_z + j\omega\varepsilon \boldsymbol{a}_z \times (\nabla_t E_z)] \tag{5.16}$$

这两个关系式表明，柱形传输系统中场的各个横向分量可以完全由两个纵向分量 E_z，H_z 来表示，即一旦求 E_z 和 H_z，其他横向分量即可求得。

5.2 导波的分类及其特点

5.2.1 导波的分类

传输系统中的模式（简称为模）又称为波型（简称为波），它是指能够在传输系统单独存在的电磁场结构或分布。通常按模式有无纵向场分量进行分类，可分为两大类：

(1) 无纵向场分量。即 $E_z = H_z = 0$。因只有横向电磁场分量，故称为横电磁模（TEM 模、TEM 波）。这类模式的电磁力线处于传输系统的横截面内，且只能存在于多导体构成的传输系统中。

(2) 有纵向场分量。这类模式可细分为三类：① $E_z \neq 0$，$H_z = 0$，这类模式称为横磁模或横磁波，简记为 TM 模或 TM 波。因为只有电场才有纵向分量，故又称为电模或电波，简记为 E 模或 E 波。该类模式的磁力线是在传输系统横截面内的闭合曲线，而电力线则为空间曲线；② $E_z = 0$，$H_z \neq 0$，这类模式称为横电模或横电波，简记为 TE 模或 TE 波，因为只有磁场才有纵向分量，故又称磁模或磁波，简记为 H 模或 H 波。该类模式的电力线是传输系统的横截面内的曲线；③ $E_z \neq 0$，$H_z \neq 0$，这类模式称为混合模或混合波，可以看成 TE 模和 TM 模的线性叠加，电磁模（简记为 EH 模）和磁电模（简记为 HE 模）等都是混合模。应指出，TE 模和 TM 模可以单独存在于由光滑导体壁面构成的柱形波导中，而混合模则存在于开放式波导和非规则波导中。

下面分别对 TEM 模、TM 模、TE 模的特性进行分析。

5.2.2 TEM 模的特性

1) TEM 模场的特点

由式(5.14)可知，当 $E_z = H_z = 0$ 时，TEM 模有非零解的条件是

$$k_c = 0 \tag{5.17}$$

若传输系统无耗，则传播常数为

$$\gamma = j\beta = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{5.18}$$

此时电磁场的横向分量可表示为

$$\boldsymbol{E}_t(T, z) = \boldsymbol{E}(T, z) = \boldsymbol{E}(T)e^{-jkz} \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{H}_t(T, z) = \boldsymbol{H}(T, z) = \boldsymbol{H}(T)e^{-jkz} = \frac{k}{\omega\mu}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}(T)e^{-jkz} \tag{5.20}$$

又由传输系统中电磁场横向分量满足的偏微分方程(5.4)，有

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{E}_t(T) = \nabla_t^2 \boldsymbol{E}(T) = 0 \tag{5.21}$$

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{H}_t(T) = \nabla_t^2 \boldsymbol{H}(T) = 0 \tag{5.22}$$

这说明，TEM 模的电场和磁场均满足二维拉普拉斯方程。由于二维静电场和恒定电流产生的磁场也满足同样的方程，因此 TEM 模的电磁场在传输系统横截面上的分布与边界条件相同的二维静态场完全一致。但应注意，这里所说的一致仅对场在横截面上的分布而言，场与变量 t 和 z 的关系两者不同，TEM 模对 t 和 z 的依赖关系为 $e^{j(\omega t-\beta z)}$，而静态场则与 t 和 z 无关。

2) 传播特性

(1) 相速 v_p

沿 z 向传播的导行波的相速定义为导波的等相位面向前移动的速度，可由相位恒定条件求出，即

$$v_p = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{\omega t-\beta z=\text{const.}} = \frac{\omega}{\beta} \tag{5.23}$$

对 TEM 模，因 $\beta = k$，故有

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v \tag{5.24}$$

(2) 波导波长 λ_g

传输系统中导行波的波导波长定义为导波在一个周期的时间内沿系统传播的距离，即

$$\lambda_g = v_p T = \frac{v_p}{f} \tag{5.25}$$

对 TEM 模，因 $v_p = v$，故有

$$\lambda_g = \frac{v}{f} = \lambda \tag{5.26}$$

(3) 波阻抗 Z

传输系统中导行波的波阻抗定义为某个模式的横向电场与横向磁场之比，即

$$Z = \frac{E_t}{H_t} \tag{5.27}$$

对 TEM 模，由上式得

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \tag{5.28}$$

特别地，若传输系统以空气作为填充媒质，则 $Z_{\text{TEM}} = \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377\ \Omega$。

由此可见，TEM 模的相速、波导波长和波阻抗与无界空间中平面波的速度、波长和本征阻抗完全相同，因为这种传输系统中导波的传播常数与无界空间中平面波的传播常数相同。对填充无耗媒质的传输系统，TEM 模的相速与频率无关，即 ω 与 β 成线性关系。这种特性称为无色散性，因此 TEM 模称为无色散模。

顺便指出，由 TEM 模的场在系统横截面的分布与静态场相同这一特点，可判断具体的传输系统能否传输 TEM 模。例如空心金属柱面波导，因其横截面内无法建立起静态场（导体表面上存在异性电荷时不可能是静态），所以空心金属波导中不存在 TEM 模。面同轴线则可建立起静态场，故可存在 TEM 模。由此可知，TEM 模只能存在于多导体构成的传输系统中。

5.2.3 TM 模和 TE 模的特性

1）场分量和波阻抗

（1）TM 模

对 TM 模，因 $H_z = 0$，于是式(5.15)和式(5.16)变为

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{-\gamma}{k_c^2}\nabla_t E_z \tag{5.29a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z \tag{5.29b}$$

其完整表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(T,\ z) &= \boldsymbol{E}_t(T,\ z) + \boldsymbol{a}_z E_z(T,\ z)\\ &= \left[-\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t E_z(T) + \boldsymbol{a}_z E_z(T)\right]\mathrm{e}^{-\gamma z}\end{aligned} \tag{5.30a}$$

$$\boldsymbol{H}(T,\ z) = \boldsymbol{H}_t(T,\ z) = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z(T)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.30b}$$

根据波阻抗的定义，对无耗传输的 TM 模，$\gamma = j\beta$，于是，其波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} = \frac{\beta}{k}Z_{\text{TEM}} \tag{5.31}$$

（2）TE 模

对 TE 模，因 $E_z = 0$，于是，式(5.15)和式(5.16)变为

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z \tag{5.32a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{-\gamma}{k_c^2}\nabla_t H_z \tag{5.32b}$$

其完整表达式为

$$\boldsymbol{E}(T, z) = \boldsymbol{E}_t(T, z) = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z(T, z) = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z(T)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.33a}$$

$$\boldsymbol{H}(T, z) = \boldsymbol{H}_t(T, z) + \boldsymbol{a}_z H_z(T, z) = \left[-\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t H_z(T) + \boldsymbol{a}_z H_z(T)\right]\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.33b}$$

对无耗传输的 TM 模，其波阻抗为

$$Z_{\mathrm{TE}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{k}{\beta}Z_{\mathrm{TEM}} \tag{5.34}$$

2) 传输特性

(1) 传输条件

从前面讨论可知，空心金属柱面波导不能传输 TEM 模，但这种传输系统则能传输 TE 模和 TM 模。不过，要使这两种波型能够在此传输系统中传输，尚需满足一定的条件。下面就来讨论这种传输系统中导波传输或截止的条件。

对 TM 和 TE 两种模式，因 $k_c \neq 0$，由 $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$，得

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} \tag{5.35}$$

因此，由 k_c^2 与 k^2 的不同关系，对每一个给定的 TM 或 TE 模，当频率由低到高变化时，其 γ 值都会出现以下三种情况：

① 当 $k^2 > k_c^2$ 时，有

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - k_c^2} \tag{5.36}$$

式中，β 为实数。此时波沿 z 轴只有相位变化，而无幅值的衰减。这就是导波的传输状态，对应的模式是传输模式。

② 当 $k^2 = k_c^2$ 时，有

$$\gamma = 0 \tag{5.37}$$

或

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}},\quad f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.38}$$

式中，ω_c，f_c 分别称为截止角频率和截止频率，相应的波长为

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c} \tag{5.39}$$

称为截止波长。

显然，当频率降低到截止频率或波长增大到截止波长时，导波的传输过程就截止。

③ 当 $k^2 < k_c^2$ 时，有

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \alpha \tag{5.40}$$

因为 γ 为实数，故波的振幅沿 z 按指数规律衰减，能量不能沿 z 向传播。这就是传输系统的截止状态，此时对应 $f < f_c$ 或 $\lambda > \lambda_c$。

归纳上述三种情况可知，只有当电磁波的工作频率 f 大于截止频率 f_c 或工作波长 λ 小于截止波长 λ_c 时，导波才能在空心金属柱面波导中传输。这说明这种传输系统具有高通滤波器的特性。

(2) 波的相速和波导波长

a) 相速

根据式(5.23)，因 $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$，而 $k = 2\pi/\lambda$，$k_c = 2\pi/\lambda_c$，于是有

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \tag{5.41}$$

b) 波导波长

根据式(5.25)，波导波长为

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \tag{5.42}$$

而 β 与 λ_g 的关系为

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \tag{5.43}$$

(3) 波的群速

前面讨论的导波的相速只是对导波的幅度、相位和频率均未受到调制时单频的等幅简谐波(单一频率的行波)而言，这种单频简谐波并不携带任何信号。为了传输信号必须对导波的参量(幅度、相位或频率)进行调制，而被调制的导波已不再是单频面是一个包含多频率成份的波。所谓群速，是指一群具有非常接近的角频率 ω 和相移常数 β 的波，在传输过程中表现出来的共同速度，这个速度表示能量的传播速度，用 v_g 表示。下面以调幅波为例，导出群速(即波包的传播速度)的表达式。

为简单起见，考虑由两个频率和相位相差甚微的等幅波叠加面成的调制波。设

$$E_1 = E_m e^{j[(\omega_0+\Delta\omega)t-(\beta_0+\Delta\beta)z]} \tag{5.44}$$

$$E_2 = E_m e^{j[(\omega_0-\Delta\omega)t-(\beta_0-\Delta\beta)z]} \tag{5.45}$$

式中，$\Delta\omega \ll \omega_0$，$\Delta\beta \ll \beta_0$。于是，合成波的场为

$$E = E_1 + E_2 = E_m e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}\left[e^{j(\Delta\omega t - \Delta\beta z)} + e^{-j(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}\right]$$
$$= 2E_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \tag{5.46}$$

可见，合成波为一调幅波，其振幅函数表示一个变化缓慢的波，它叠加在高频载波上形成合成波的幅度包络线（或称合成波的波包）。合成波的变化规律如图 5.3 所示。

调幅波的信号是由波包在传播方向上的运动来传递的，因此波包的传播速度就代表了信号的传递速度。波包的传播速度很容易由相位恒定条件求出，即

$$\Delta\omega t - \Delta\beta z = \text{const.} \tag{5.47}$$

将上式对 t 求导，可得群速的表达式为

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \tag{5.48}$$

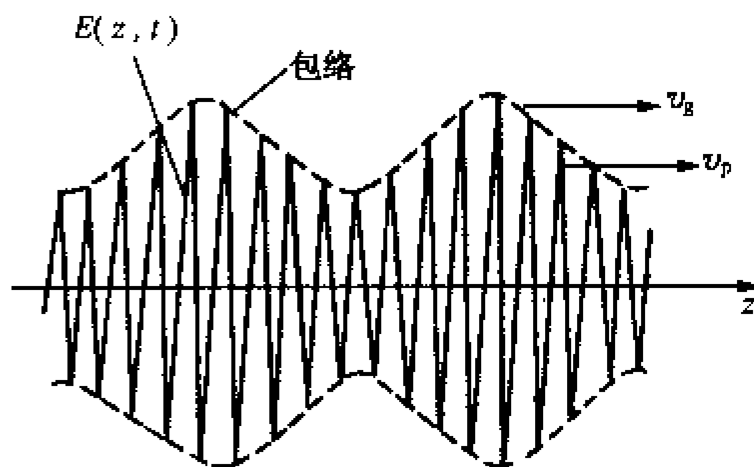


图 5.3 调幅波的变化规律

由于群速定义为频率和相位相差甚微的一群波所表现的共同速度，因此只有在 $\Delta\omega \to 0$，$\Delta\beta \to 0$ 的极限情况下才是严格的。于是，群速的严格表达式为

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_{\beta 0} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\beta 0}} \tag{5.49}$$

由于 $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_c^2$，因此 TM 模和 TE 模的群速为

$$v_g = v\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2} = v\sqrt{1-(f_c/f)^2} \tag{5.50}$$

从 TM 和 TE 模的相速、群速的表达式可看出以下两点：

(1) $v_p > v$，$v_g < v$，且 $v_p v_g = v^2$；

(2) v_p，v_g 均为频率的函数，波速随频率变化，因此 TM 模和 TE 模为色散波。对 TEM 模，因其 $\lambda_c \to \infty$，故有 $v_p = v_g = v$，即波速与频率无关，这再次说明无耗传输的 TEM 模为无色散波。

5.2.4 导波的传输功率、能量和衰减

1) 导波的（平均）传输功率

导波的传输功率属于有功功率，它等于复功率取实部。在规则传输系统中，当不考虑损耗时，波沿正 z 方向传输的行波功率就是 z 向的平均功率流密度矢量沿横截面的积分，即

$$P = \int_S \boldsymbol{S}_{av} \cdot dS = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot dS = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_S (\boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{H}_t^*)\cdot \boldsymbol{a}_z dS$$
$$= \frac{1}{2Z}\int_S |\boldsymbol{E}_t|^2 dS = \frac{Z}{2}\int_S |\boldsymbol{H}_t|^2 dS \tag{5.51}$$

式中，$\boldsymbol{H}_t^*$ 为 $\boldsymbol{H}_t$ 的共轭复矢量；Z 为对应传输系统中传输模式的波阻抗。上式是导波传输功率的一般表达式，对 TEM，TM 和 TE 模式均适用。

2）导波的能量

传输系统中单位长度内导波的平均电场储能和磁场储能 W_{eu}，W_{mu} 表示为

$$W_{eu} = \int_S (w_e)_{av} \mathrm{d}S = \frac{\varepsilon}{4}\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \mathrm{d}S \tag{5.52a}$$

$$W_{mu} = \int_S (w_m)_{av} \mathrm{d}S = \frac{\mu}{4}\int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^* \mathrm{d}S \tag{5.52b}$$

式中，$(w_e)_{av}$，$(w_m)_{av}$ 分别为平均电场和磁场能量密度。将 TEM 模、TM 模和 TE 模的电场和磁场表达式代入式(5.52)，即可求得相应传输系统单位长度内平均电场储能和磁场储能。

导波能量具有以下重要特性：在无耗传输系统中，导波的平均电场储能和磁场储能彼此相等，即

$$W_e = W_m \tag{5.53}$$

为了证明式(5.53)成立，考察如图 5.4 所示的无耗金属柱面波导，其中波导长度为 l，波导段的封闭面的面积 $S = S_1 + S_2 + S_3$。由复坡印亭定理，可知

$$-\frac{1}{2}\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = P_l + j2\omega(W_m - W_e) \tag{5.54}$$

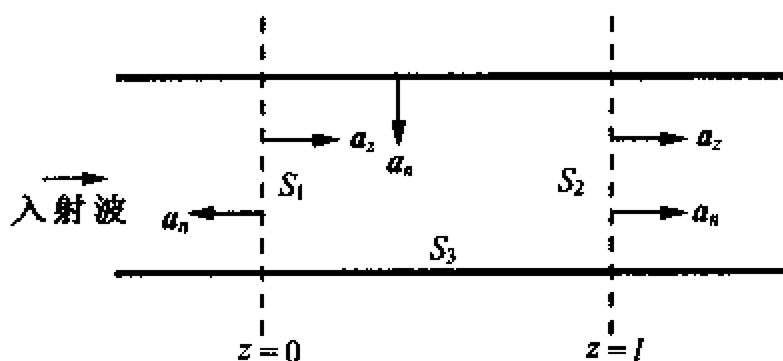


图 5.4　无耗金属柱面波导段

由于波导无耗，故 $P_l = 0$。若设 S_1 面上的场为 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{H}_1$，则 S_2 面上的场应为 $\boldsymbol{E}_1 \mathrm{e}^{-j\beta l}$、$\boldsymbol{H}_1 \mathrm{e}^{-j\beta l}$。图中 S_3 为理想金属壁面，在此壁面上 $\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{E} = 0$，故 S_3 面上的积分为零，因而得

$$\frac{1}{2}\int_{S_1} (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1^*) \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{S_2} (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1^*) \cdot (-\boldsymbol{a}_z)\mathrm{d}S = j2\omega(W_m - W_e) \tag{5.55}$$

显然，上式左端两项积分相等而符号相反，故为零。于是，在 S_1，S_2 所限定的波导段内式(5.55)成立。

3）导波的衰减

前面的分析是假设传输系统没有损耗，即没有导体损耗（$\sigma = \infty$），也没有介质损耗（μ，ε 均为实数），所以导波在传输过程中幅度没有衰减，$\alpha = 0$，$\gamma = j\beta$，这是理想的情况。事实上，导体的电导率不可能是无穷大，导体总存在欧姆损耗（σ 为有限值）；介质对导波也总会有一定的损耗（μ，ε 为复数），从而引起导波的衰减。此外，当 $\lambda > \lambda_c$ 时，传播常数 γ 为实数，波沿 z 向无相位变化，而幅度则按指数规律衰减，传输系统不能传播能量。这种衰减不是由于能量损失而引起，而是由于不满足传输条件引起，故称为截止衰减。截止衰减与由于导体和介质损耗引起的衰减性质不同，这里仅讨论由导体和介质损耗引起的衰减。

计算导波衰减的一种常用方法是根据损耗功率来计算。当传输系统有损耗时，导波的振幅随 z 按 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ 的规律变化，传输功率则按 $\mathrm{e}^{-2\alpha z}$ 的规律变化。设在 $z = 0$ 处的传输功率为

P_0，则在 z 处的功率 P 为

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \tag{5.56}$$

将上式对 z 求偏导，得

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -2\alpha P \tag{5.57}$$

因为传输功率沿 z 的减小率(变化率的负值)等于传输系统单位长度上的损耗功率 P_l，所以

$$P_l = -\frac{\partial P}{\partial z} = 2\alpha P \tag{5.58}$$

于是，可得

$$\alpha = \frac{P_l}{2P} \tag{5.59}$$

上式表明，导波的衰减常数可以通过计算损耗功率和传输功率求得。

下面分别讨论导体衰减和介质衰减。

(1) 导体衰减 α_c

假定介质无耗，此时导波的衰减仅由导体损耗引起。当导体有耗时，电导率为有限值，导体表面电场的切向分量不再为零，磁场的法向分量也不再为零，此时导波将进入导体内部。为导出导体损耗功率 P_l 的计算公式，设传输系统内壁表面上的微元面积为 $dS = dl dz$，dl 和 dz 分别为沿传输系统横截面的周界 l 和沿 z 轴方向的微元长度，则在该微元面积上损耗功率为

$$dP_l = \frac{R_S}{2} |\boldsymbol{H}_\tau|^2 dl dz \tag{5.60}$$

于是单位长度上的损耗功率为

$$P_l = \frac{R_S}{2} \oint_l |\boldsymbol{H}_\tau|^2 dl \tag{5.61}$$

式中，$|\boldsymbol{H}_\tau|$ 为传输系统内壁表面附近磁场切向分量的幅值，R_S 是内壁表面上的表面电阻，可表示为

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \tag{5.62}$$

而 δ 为趋肤深度。

将式(5.51)和式(5.61)代入式(5.59)即得导体衰减的表示式：

$$\alpha_c = \frac{R_S \oint_l |\boldsymbol{H}_\tau|^2 dl}{2Z \int_S |\boldsymbol{H}_t|^2 dS} \quad \text{Np/m} \tag{5.63}$$

需要指出，上式中的 $\boldsymbol{H}_\tau$ 和 $\boldsymbol{H}_t$ 均为导体有耗情况下传输系统中的真实场。要严格求解它们则必须重新求解有耗边界下的麦克斯韦方程，显然这样做是十分困难和麻烦的。因此，

通常采用近似计算，即对传输系统的内壁由良导体构成的情况而言，用理想情况下的导波场来代替其真实场，这样计算出的 α_c 虽是近似的，但尚能满足实际应用的精度要求。

还应指出，实际传输系统的衰减还与导波进入导体的表面光洁度有关，当表面不平度超过趋肤深度时将使表面电流流程增加，从而使衰减比理论计算值要高。因此，对不同波段的传输系统通常要求一定的表面光洁度，以保证不平度小于趋肤深度。此外，传输系统内壁表面氧化、油污等也会使衰减增大。

(2)介质衰减 α_d

假设导体是理想的，导波的衰减仅由传输系统中填充的非理想媒质的功率损耗引起。由非理想媒质引起的功率损耗包括两部分：一部分是由媒质的电导率 $\sigma \neq 0$ 引起的；另一部分则是由介质极化阻尼引起的，表现为 ε 不再是纯实数，而是一个复数，即 $\varepsilon_d = \varepsilon'_d - j\varepsilon''_d$，其中 $\varepsilon'_d = \varepsilon$。于是，根据麦克斯韦方程(2.99b)，有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon_d \boldsymbol{E} + \sigma \boldsymbol{E} = j\omega\left(\varepsilon_d - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}$$

为此，可定义另一等效复介电常数 ε_{ed}，使

$$\varepsilon_{ed} = \varepsilon_d - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon'_d\left(1 - j\frac{\sigma + \omega\varepsilon''_d}{\omega\varepsilon'_d}\right) = \varepsilon'_d(1 - j\tan\delta) \tag{5.64}$$

式中，$\tan\delta = (\sigma + \omega\varepsilon''_d)/\omega\varepsilon'_d$，为介质的损耗角正切。因在微波波段 $\omega\varepsilon''_d$ 比 σ 大得多，故 $\tan\delta$ 可近似表示为

$$\tan\delta \approx \frac{\varepsilon''_d}{\varepsilon'_d} \tag{5.65}$$

根据传播常数方程 $\gamma^2 = k_c^2 - k^2$，有

$$\gamma = \alpha_d + j\beta = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon'_d(1 - \tan\delta)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'_d}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}\sqrt{1 - \frac{j\tan\delta}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \tag{5.66}$$

当损耗较小，即 $\tan\delta \ll 1$，且工作频率远高于截止频率时，将上式中最后一个因子用幂级数展开，并取前两项作近似，则有

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'_d}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}\left\{1 - j\frac{\tan\delta}{2\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right]}\right\} \tag{5.67}$$

将上式的实、虚部分开即得

$$\alpha_d = \frac{\pi\tan\delta}{\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \text{Np/m} \tag{5.68a}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'_d}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \tag{5.68b}$$

应指出，当介质损耗不大时，也可采用式(5.59)导出与上式相同的结果。

于是，总的衰减常数 α 可写为

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d \tag{5.69}$$

式中，α_c 和 α_d 分别用式(5.63)和式(5.68)计算。

5.3 矩形波导中的导波

矩形截面的金属波导管(简称矩形波导)是最常用的传输系统之一，其波导内壁的宽边尺寸为 a，窄边尺寸为 b，如图 5.5 所示。这种波导管一般用铜制成，也可用铝或其他金属材料制作。本节将在 5.1 节的基础上具体地分析规则矩形波导中的场分布及其传输特性。

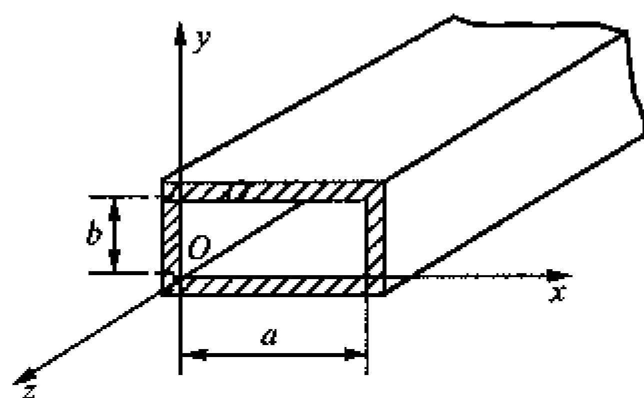


图 5.5 矩形波导与直角坐标系

5.3.1 矩形波导中的模式及其场分布

选取直角坐标系如图 5.5 所示。根据 5.1 节的讨论可知，正交柱坐标系中纵向电场分量和纵向磁场分量的横向分布函数应满足二维标量亥姆霍兹方程，即

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} E_z(T) \\ H_z(T) \end{Bmatrix} + k_c^2 \begin{Bmatrix} E_z(T) \\ H_z(T) \end{Bmatrix} = 0 \tag{5.70}$$

式中，$E_z(T) = E_z(x, y)$，$H_z(T) = H_z(x, y)$ 分别表示纵向电场和纵向磁场在横截面上的二维分布函数。若波导无耗，则 $k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2$。在直角坐标系下，因

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

故式(5.70)变为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{Bmatrix} E_z(x, y) \\ H_z(x, y) \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{Bmatrix} E_z(x, y) \\ H_z(x, y) \end{Bmatrix} + k_c^2 \begin{Bmatrix} E_z(x, y) \\ H_z(x, y) \end{Bmatrix} = 0 \tag{5.71}$$

显然，这是两个同一类型的方程，可只讨论其中一个纵向分量的求解。下面讨论 E_z 的求解步骤。

应用分离变量法，令 $E_z(x, y) = X(x)Y(y)$，代入方程(5.71)，可得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_c^2$$

这个等式左端的第一项和第二项分别是 x 和 y 的函数，而右端的 k_c^2 是一个常数，因此若要求该式为一恒等式，则左端的第一项和第二项也应分别等于常数。设这两个常数分别为 $-k_x^2$ 和 $-k_y^2$，由此可得以下两个常微分方程：

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0 \tag{5.72}$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y)=0 \tag{5.73}$$

而 $k_c^2=k_x^2+k_y^2$。

方程(5.72)和(5.73)的解分别为

$$X(x)=A_1e^{-jk_xx}+A_2e^{jk_xx} \tag{5.74}$$

$$Y(y)=B_1e^{-jk_yy}+B_2e^{jk_yy} \tag{5.75}$$

又因为

$$E_z(T,z)=E_z(T)Z(z)=E_z(x,y)Z(z)$$

以及

$$Z(z)=C_1e^{-j\beta z}+C_2e^{j\beta z}$$

因此可得电场纵向分量 $E_z(x,y,z)$ 的表达式为

$$E_z(x,y,z)=(A_1e^{-jk_xx}+A_2e^{jk_xx})(B_1e^{-jk_yy}+B_2e^{jk_yy})(C_1e^{-j\beta z}+C_2e^{j\beta z}) \tag{5.76}$$

对于磁场的纵向分量 $H_z(x,y,z)$，可通过同样的步骤得到

$$H_z(x,y,z)=(A_3e^{-jk_xx}+A_4e^{jk_xx})(B_3e^{-jk_yy}+B_4e^{jk_yy})(C_3e^{-j\beta z}+C_4e^{j\beta z}) \tag{5.77}$$

式中，A_1，B_1，C_1 以及 k_x，k_y 等都是待定常数，它们由具体的边界条件确定。下面分别对TM模和TE模进行讨论。

1）TM模(E模)

对TM模，$H_z=0$，$E_z\neq 0$，此时 E_z 表达式中的待定常数可利用在波导管四个内壁表面上为零的边界条件确定。具体地，其边界条件为

$$E_z\big|_{x=0,a}=0,\ E_z\big|_{y=0,b}=0 \tag{5.78}$$

若只考虑沿正 z 方向传播的行波，则纵向电场的表达式应为

$$E_z(x,y,z)=(A_1e^{-jk_xx}+A_2e^{jk_xx})(B_1e^{-jk_yy}+B_2e^{jk_yy})C_1e^{-j\beta z} \tag{5.79}$$

将上式代入式(5.78)，得

$$\left.\begin{array}{l}A_1=-A_2,\ B_1=-B_2\\ k_x=\dfrac{m\pi}{a},\ k_y=\dfrac{n\pi}{b}\begin{pmatrix}m=1,2,\cdots\\ n=1,2,\cdots\end{pmatrix}\end{array}\right\} \tag{5.80}$$

于是

$$E_z(x, y, z) = -4A_2B_2C_1 \sin k_x x \sin k_y y e^{-j\beta z} = E_0 \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{b}y e^{-j\beta z} \tag{5.81}$$

式中，$E_0 = -4A_2B_2C_1$。

将式(5.81)代入式(5.29)，可得相应的横向场分量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t &= \frac{-j\beta}{k_c^2}\nabla_t E_z = \frac{-j\beta}{k_c^2}\left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) = \boldsymbol{a}_x E_x + \boldsymbol{a}_y E_y \\ &= \frac{-j\beta}{k_c^2}E_0\left[\boldsymbol{a}_x \frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y + \boldsymbol{a}_y \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\right]e^{-j\beta z} \end{aligned} \tag{5.82a}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_t &= \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(-\boldsymbol{a}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial E_z}{\partial y}x\right) = \boldsymbol{a}_x H_x + \boldsymbol{a}_y H_y \\ &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}E_0\left[\boldsymbol{a}_x \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y - \boldsymbol{a}_y \frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\right]e^{-j\beta z} \end{aligned} \tag{5.82b}$$

式中

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{5.83}$$

而 E_0 为 TM 模的振幅函数，它与波导中场的激励情况有关。

由式(5.81)和式(5.82)可见，TM 模的各场分量沿波导的轴向呈行波状态，在波导横截面的 x，y 方向上呈驻波分布。当 m 和 n 取不同自然数时，每一对 m，n 值即对应不同的模式，记为 TM_{mn} 模(或 TM_{mn} 波，或 E_{mn} 模)。显然，有无穷多个 TM 模式。但 TM_{0n}，TM_{m0} 和 TM_{00} 模式不存在，这是因为当 m 或 n 以及 m 和 n 同时为零时，TM 模的全部场分量均等于零。因此，TM 模的最低次模式是 TM_{11}，而其他可能存在的 TM_{mn} 模式均为高次模式。TM_{mn} 的第一个下标“m”表示场量沿 x 轴变化的半波数；第二个下标“n”则表示场量沿 y 轴变化的半波数。图 5.6 中示出矩形波导中 TM_{11} 模和 TM_{21} 模的电磁力线分布图。有关矩形波导中传输模式的电磁力线分布图的作法，以后再详细讨论。

2) TE 模(H 模)

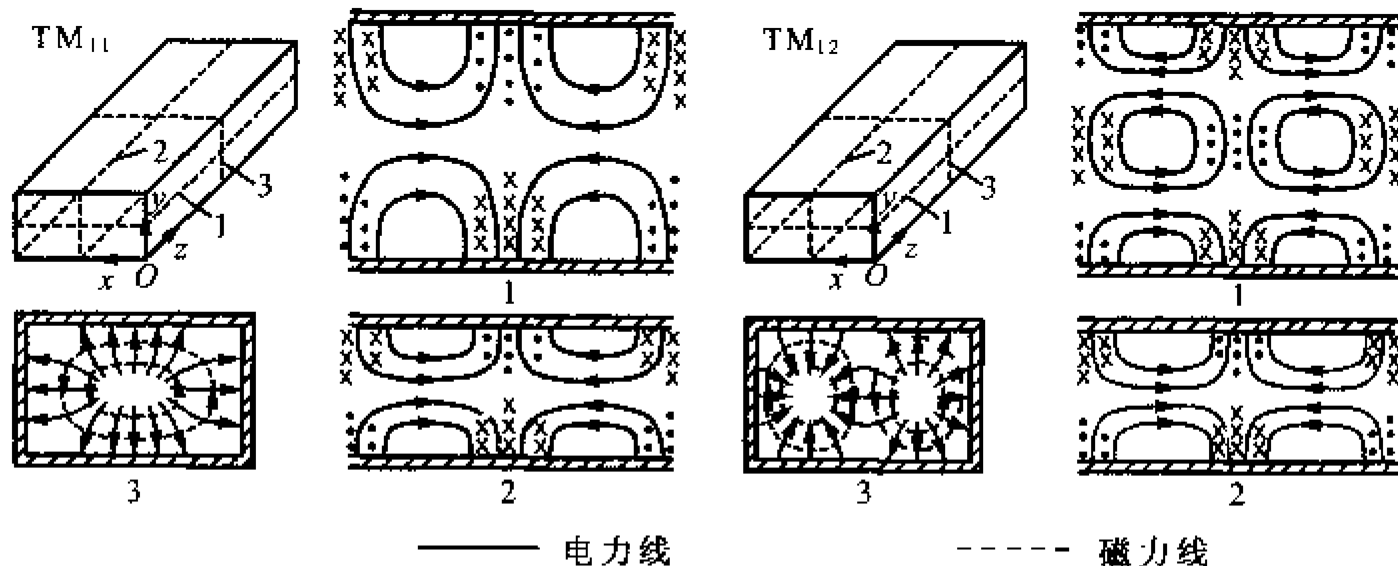


图 5.6　TM_{11} 模和 TM_{21} 模的电磁力线分布图

对 TE 模，$H_z \neq 0$，$E_z = 0$，若只考虑沿正 z 方向传播的行波，则纵向磁场分量 H_z 为

$$H_z(x, y, z) = (A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x})(B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y}) C_3 e^{-j\beta z} \tag{5.84}$$

由于 H_z 在波导的四个内壁表面上不为零(H_z 为磁场切向分量)，因此无法直接利用四个壁面上 H_z 的边界条件来确定式(5.84)中的待定常数。须根据式(5.32)导出场的横向分量，利用横向场分量的边界条件来确定待定常数。由式(5.32b)可得

$$H_x = -j\frac{\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\beta k_x}{k_c^2}(-A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x})(B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y}) C_3 e^{-j\beta z}$$

$$H_y = -j\frac{\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\beta k_y}{k_c^2}(A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x})(-B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y}) C_3 e^{-j\beta z}$$

将以上两式代入边界条件：$H_x|_{x=0,a} = 0$，$H_y|_{y=0,b} = 0$，可得

$$\left.\begin{aligned} & A_3 = A_4,\ B_3 = B_4 \\ & k_x = \frac{m\pi}{a},\ k_y = \frac{n\pi}{b}\begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \cdots \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{5.85}$$

于是，式(5.84)变为

$$H_z(x, y, z) = 4A_3B_3C_3 \cos k_x x \cos k_y y e^{-j\beta z} = H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y e^{-j\beta z} \tag{5.86}$$

式中，$H_0 = 4A_3B_3C_3$。

将式(5.86)代入式(5.32)，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\left(-\boldsymbol{a}_x\frac{\partial H_z}{\partial y} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) = \boldsymbol{a}_x E_x + \boldsymbol{a}_y E_y \\ &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2}H_0\left[\boldsymbol{a}_x\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y - \boldsymbol{a}_y\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\right]e^{-j\beta z} \end{aligned} \tag{5.87a}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_t &= -\frac{j\beta}{k_c^2}\nabla_t H_z = -\frac{j\beta}{k_c^2}\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial H_z}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) = \boldsymbol{a}_x H_x + \boldsymbol{a}_y H_y \\ &= \frac{j\beta}{k_c^2}H_0\left[\boldsymbol{a}_x\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y + \boldsymbol{a}_y\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\right]e^{-j\beta z} \end{aligned} \tag{5.87b}$$

从式(5.86)和式(5.87)可见，TE 模的各场分量沿波导的轴向也呈行波状态，在波导横截面的 x，y 方向同样呈驻波分布。将不同的 m，n 值代入式(5.86)和式(5.87)即得到 TE 模的一组场分量表达式，即每一对 m，n 值对应着一种模式，记为 TE_{mn} 模(或 H_{mn} 模)。显然，TE 模也有无穷多个。由于 m 和 n 同时取为零时，TE 模的全部分量都等于零。因此，TE_{mn} 下标中的 m 和 n 不能同时为零，但 TE 模可以存在 TE_{m0} 和 TE_{0n} 模。由此可知，TE 模中的最低次模式为 TE_{10}(一般地，$a > 2b$)，而其余模式均为高次模式。此外，m 和 n 的意义与 TM 模的相同。图 5.7 中示出矩形波导中 TE_{11} 模和 TE_{21} 模的电磁力线分布图。

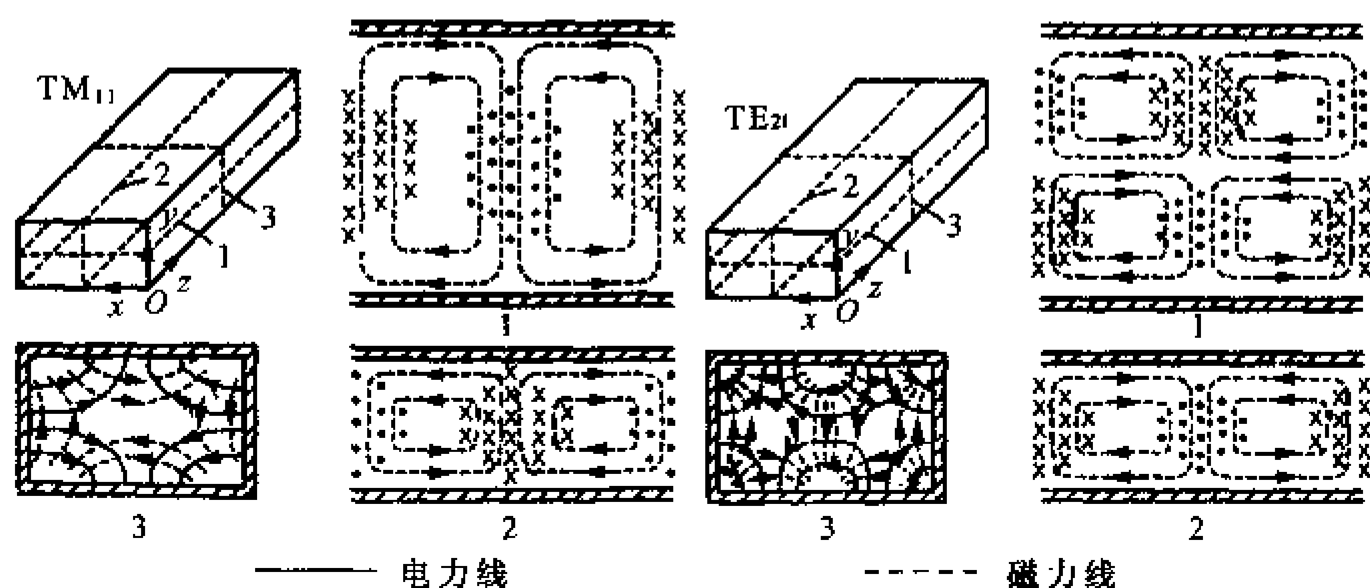


图 5.7 TE11 模和 TE21 模的电磁力线分布图

5.3.2 传输特性

从上面的讨论可知，矩形波导中可以传输 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模，这些模式沿波导的横截面为驻波分布，沿轴向为行波状态，且一般说来，波指数 m，n 不同，就有不同的场分布，从而具有不同的传输特性。下面讨论它们的传输特性。

1）截止波长和截止频率

截止波长是表征波导中传输模式特性的一个重要的参量。矩形波导中 TM 和 TE 模的截止波长具有相同的形式，即

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{5.88}$$

可见，截止波长不仅与模式有关，而且与波导尺寸有关。

波导的截止特性也可用截止频率来描述，矩形波导的 TM 模和 TE 模的截止频率为

$$f_c = \frac{v}{\lambda_c} = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{5.89}$$

显然，f_c 不仅与波导的尺寸和模式有关，而且与波导中填充媒质的电参数 μ 和 ε 有关。

根据导波在波导中的传输条件可知，当电磁波的波长或频率满足关系式 $\lambda < \lambda_c$（或 $f > f_c$）时，导波才可在矩形波导中传输。因此，一般说来，不同的模式有不同的传输条件。但当 m 和 n 不为零时，TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模具有相同的截止波长（或截止频率），这种截止波长相同但模式不同的现象称为模式简并现象，对应的模式称为简并模式。在矩形波导中，因为分别与 TE_{0n} 和 TE_{m0} 模式相对应的 TM_{0n} 和 TM_{m0} 模式不存在，所以 TE_{0n} 和 TE_{m0} 模是非简并模式，其余的 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模均存在简并模式。由于简并模式具有相同的传播常数，当波导中出现不均匀性或金属壁的电阻率较大时，相互之间易发生能量交换，从而造成能量损耗和相互干扰。因此，一般情况下应避免简并模式出现，但在个别场合简并模式也得到利用。

从式(5.88)可见，当波导尺寸 a，b 一定时，波指数 m，n 越大，截止波长越短。当 $a > b$（通常 $a \geqslant 2b$）时，在矩形波导所能存在的全部模式中，TE_{10} 模的截止波长最长，称为最低

次模式(或主模),其他模式则称为高次模式。当把矩形波导作为传输系统时,通常都采用主模作为工作模式,即单模传输,而高次模式应被抑制掉。

为了对矩形波导中各模式的截止波长有一个数量上的概念,图 5.8 中画出了 BJ-32 波导 ($a \times b = 72.14 \times 34.04\ \text{mm}^2$) 中各模式截止波长的分布。图中的阴影部分为截止区,在此范围内沿波导不能传播任何模式的导波,即所有的模式均处于截止状态。根据传输条件 $\lambda < \lambda_c$,从图中不难看出,当工作波长 $\lambda = 10$ cm 时,这种波导中只能传输 TE_{10} 模;当 $\lambda = 5$ cm 时,波导中可以传输 TE_{10},TE_{20},TE_{01},TE_{11} 和 TM_{11} 五种模式;当工作波长进一步减小时,波导中可以传输更多的模式。由此可见,当波导的尺寸一定时,工作波长越短则波导中可能传输的模式就越多。因此,若要实现 TE_{10} 模的单模传输,则必须选择合适的工作波长,这里应取 $\lambda = 10$ cm。反之,当工作波长给定时,要实现 TE_{10} 模的单模传输,则必须选择合适型号的波导。如当工作波长为 3 cm 时,要实现 TE_{10} 模的单模传输,应选取 BJ-100 的矩形波导 ($a \times b = 22.86 \times 10.16\ \text{mm}^2$)。

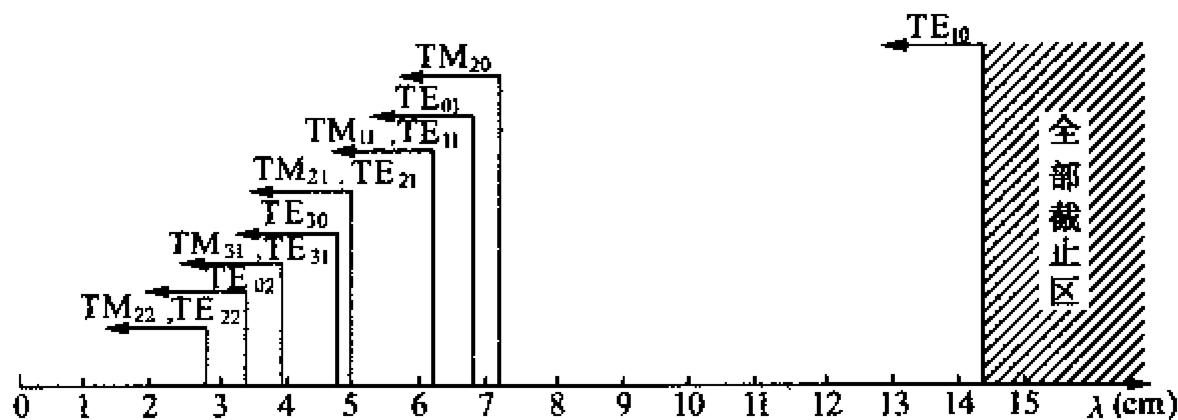


图 5.8 BJ-32 波导中几种低次模式的截止波长的分布图

2) 相速与群速

根据式(5.41)知,相速 v_p 为

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \tag{5.90}$$

可见,相速与波导尺寸、模式及频率有关。由于在一定尺寸的波导中传输某一模式的导波时,其相速与频率有关,所以矩形波导中传播的导波是色散波。根据式(5.50)知,群速 v_g 为

$$v_g = v\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \tag{5.91}$$

3) 波导波长

根据式(5.42)知,波导波长 λ_g 为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \tag{5.92a}$$

当矩形波导中填充相对介电常数为 ε_r 的无耗介质时,上式变为

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \tag{5.92b}$$

4) 波阻抗

由式(5.31)和式(5.34)可得 TM 和 TE 模的波阻抗分别为

$$Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\mu/\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = Z_{TEM}\frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta\frac{\lambda}{\lambda_g} \tag{5.93}$$

$$Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = Z_{TEM}\frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta\frac{\lambda_g}{\lambda} \tag{5.94}$$

式中，$Z_{TEM} = \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$，为 TEM 模的波阻抗。

5) 截止状态

当 $\lambda > \lambda_c$ 或 $f < f_c$ 时，矩形波导中的截止场有下列特点：(1) 传播常数 $\gamma = \alpha = \sqrt{k_c^2 - k^2}$ 为正实数，场沿 z 按 $e^{-\alpha z}$ 作指数衰减，即场沿 z 呈交变衰减状态；(2) 当 $\lambda \to \lambda_c$ 时，$v_p \to \infty$，$\lambda_g \to \infty$，$v_g \to 0$；当 $\lambda > \lambda_c$ 时，v_p，v_g 以及 λ_g 均为纯虚数，从而变得无意义；(3) 当 $\lambda \to \lambda_c$ 时，$Z_{TE} \to \infty$，$Z_{TM} \to 0$；当 $\lambda > \lambda_c$ 时，Z_{TE} 及 Z_{TM} 都为纯虚数，Z_{TE} 呈感性，Z_{TM} 呈容性。电场与磁场的相位相差 90°。根据坡印亭矢量与场量间的关系可知，波导中沿 z 向没有能量传输，只是场沿横向呈驻波分布，这相当于在波导横向发生谐振。因此这种状态也称为波导的横向谐振状态。

5.3.3 矩形波导的主模——TE_{10} 模(H_{10} 模)

矩形波导通常工作在 TE_{10} 模单模传输情况，这是因为 TE_{10} 模是最低次模式，易于实现单模传输。同时，当工作波长一定时，传输 TE_{10} 模的波导尺寸最小；若波导尺寸一定，则实现单模传输的频带最宽。下面对 TE_{10} 模作进一步讨论。

1) TE_{10} 模的传输参量

将 TE_{10} 模的截止波长 $\lambda_c = 2a$ 代入相移常数为 β、相速为 v_p、群速为 v_g、波导波长为 λ_g 以及波阻抗为 Z_{TE} 的公式中，即可得到 TE_{10} 波的传输参量如下：

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{5.95}$$

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \tag{5.96}$$

$$v_g = v\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{5.97}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \tag{5.98}$$

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \tag{5.99}$$

2）TE_{10}模的场结构

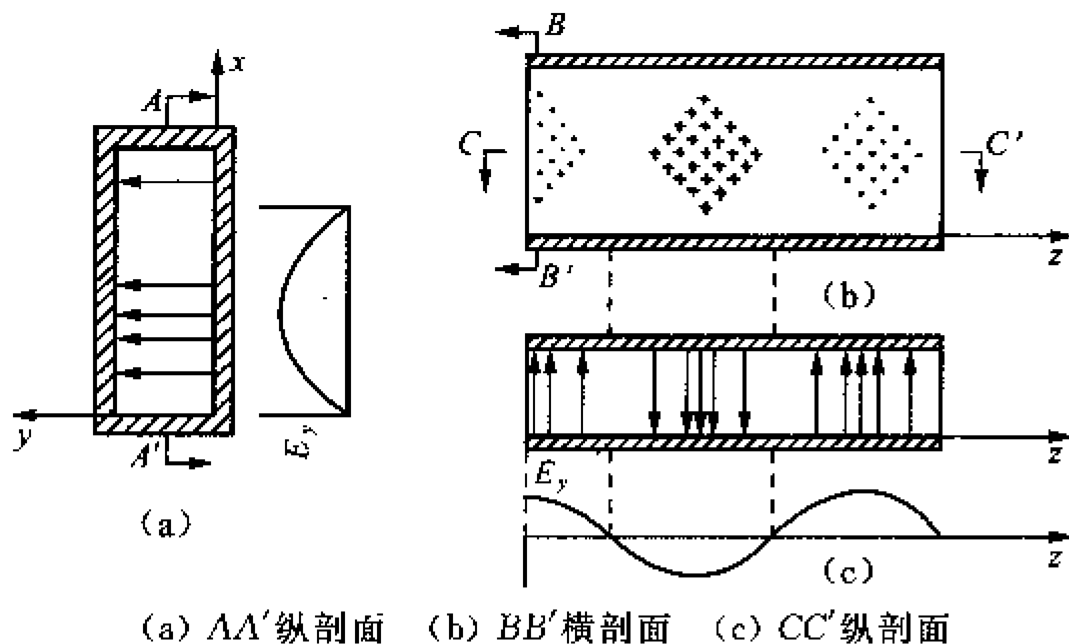
将 $m=1$，$n=0$ 及 $\lambda_c=2a$ 代入式(5.86)和式(5.87)，可得 TE_{10}模的各个场分量表达式为

$$\left.\begin{aligned} H_x &= j\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{-j\beta z} \\ H_z &= H_0\cos\frac{\pi}{a}x\,e^{-j\beta z} \\ E_y &= -j\frac{\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{-j\beta z} \end{aligned}\right\} \tag{5.100}$$

其瞬时表达式为

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\sin(\omega t-\beta z) \\ H_z &= H_0\cos\frac{\pi}{a}x\cos(\omega t-\beta z) \\ E_y &= \frac{\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\sin(\omega t-\beta z) \end{aligned}\right\} \tag{5.101}$$

由 TE_{10}模的场分量表达式可知，TE_{10}模的电场只有 E_y 分量，磁场只有 H_x 和 H_z 两个分量，并且电磁场沿 y 方向没有变化。电场分量 E_y 沿 x 方向呈正弦变化，沿波导的宽边有半个波数的分布，即在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，$E_y=0$；在 $x=a/2$ 处，E_y 出现最大值。此外，E_y 沿 z 向按正弦分布。为了能够直观形象地了解场的分布图像（即场结构），通常用电磁力线在某点的切线方向表示场的方向，用电磁力线的疏密程度来表示该点处场的强弱。图 5.9 示出了 TE_{10}模的电力线的分布图。

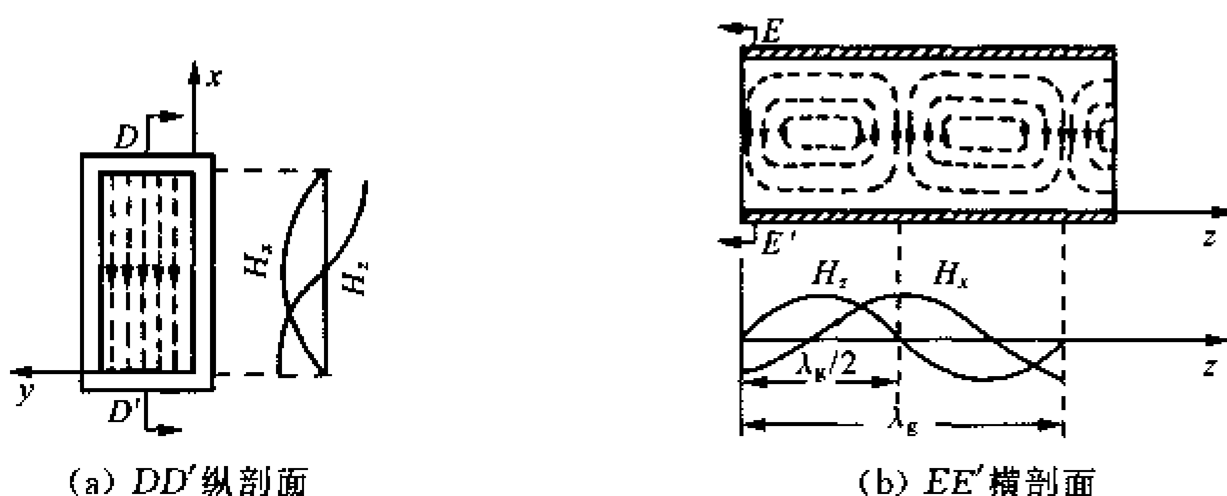


(a) AA'纵剖面 (b) BB'横剖面 (c) CC'纵剖面

图 5.9 TE_{10}模的电场分布图

TE_{10}模的磁场分量 H_x 沿波导宽边呈正弦变化，也有半波数分布，即在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，$H_x=0$，在 $x=a/2$ 处，H_x 出现最大值；H_z 沿波导宽边呈余弦变化，即在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，H_z 出现最大值，在 $x=a/2$ 处，$H_z=0$。H_x 沿 z 向按正弦变化，而 H_z 则沿 z 向按余弦变化。根据 H_x 和 H_z 两个分量的变化规律，不难知道它们在 xOy 平面内应形成近似椭圆形状的闭合磁力线分布，如图 5.10 所示。

将上面得到的电场图形和磁场图形重叠在一起，就可得到 TE_{10}模的场结构的剖面图，由剖面图不难推出其空间立体图形。图 5.11 给出了 TE_{10}模在某一瞬间场结构的透视图。



(a) DD'纵剖面 (b) EE'横剖面

图 5.10 TE_{10}模的磁场的分布图

从图中可见，H_x 与 E_y 的最大值在同一截面上出现，根据坡印亭矢量与场量间的关系可知，电磁波沿波导轴向（z 向）按行波状态变化；H_z 与 E_y 的最大值相差 $\lambda_g/4$（两者相位差为 90°），这表明导波的场在波导横向呈驻波分布。

应指出，上面作出的 TE_{10} 模的场结构只是某瞬间的静止图像，若考虑其时变规律，则应为其电磁力线保持形状和相对位置不变，整个沿 z 轴以相速 v_p 运动。

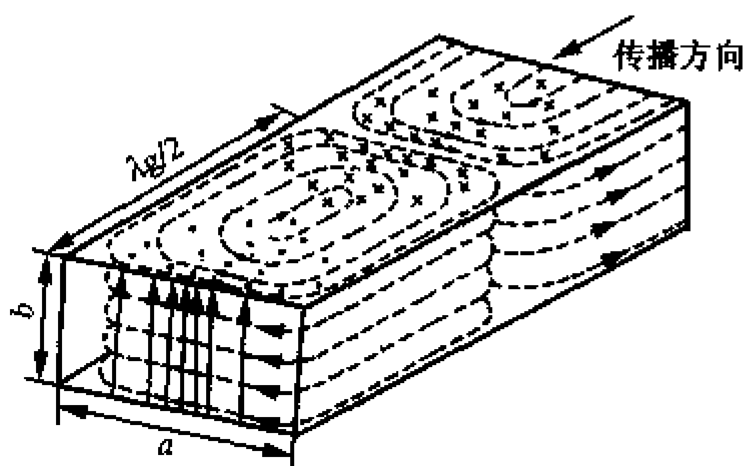


图 5.11 TE_{10}模电磁场结构的透视图

3) TE_{10}模的面流分布

在微波频率上，由于趋肤效应，可认为在波导内壁上感应出的高频电流只在其内壁表面上流动。面电流的分布取决于波导内壁表面附近的磁场分布，即面电流密度 $\boldsymbol{J}_S$ 应满足以下关系：

$$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{H}_\tau \tag{5.102}$$

式中，$\boldsymbol{a}_n$ 为波导内壁表面法线方向的单位矢量，$\boldsymbol{H}_\tau$ 是波导内壁表面处的切向磁场分量。这说明 $\boldsymbol{J}_S$ 的大小等于 $\boldsymbol{H}_\tau$ 的大小，而 $\boldsymbol{J}_S$ 的方向与 $\boldsymbol{H}_\tau$ 互相垂直，由 $\boldsymbol{J}_S$，$\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{H}_\tau$ 构成的右手螺旋关系确定。

在 $y=0$ 处的波导宽壁的上表面上，$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_y$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_S|_{y=0} &= \boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{H}|_{y=0} = \boldsymbol{a}_y \times \left(\boldsymbol{a}_x j\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x + \boldsymbol{a}_z H_0\cos\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta z}\\ &= \left(\boldsymbol{a}_x H_0\cos\frac{\pi}{a}x - j\boldsymbol{a}_z\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta z}\end{aligned} \tag{5.103}$$

在 $y=b$ 处的波导宽壁的下表面上，$\boldsymbol{a}_n=-\boldsymbol{a}_y$，有

$$\boldsymbol{J}_S|_{y=b} = -\boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{H}|_{y=b} = -\boldsymbol{J}_S|_{y=0} \tag{5.104}$$

在 $x=0$ 处的波导窄壁的右表面上，$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_x$，有

$$\boldsymbol{J}_S|_{x=0} = \boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{H}|_{x=0} = -\boldsymbol{a}_y H_0 e^{-j\beta z} \tag{5.105}$$

在 $x=a$ 处的波导窄壁的左表面上，$\boldsymbol{a}_n=-\boldsymbol{a}_x$，有

$$\boldsymbol{J}_S\big|_{x=a} = \boldsymbol{J}_S\big|_{x=0} \qquad (5.106)$$

可见，波导上、下宽壁内表面上的面电流由两个分量构成，总的电流是这两部分电流的叠加，面上、下宽壁内表面上的电流大小相等，方向相反；波导左、右窄壁内表面上的电流只有 y 向分量，且在两窄壁上电流的大小相等，方向相同。图 5.12 示出了 TE_{10} 模的面电流分布的立体图形。

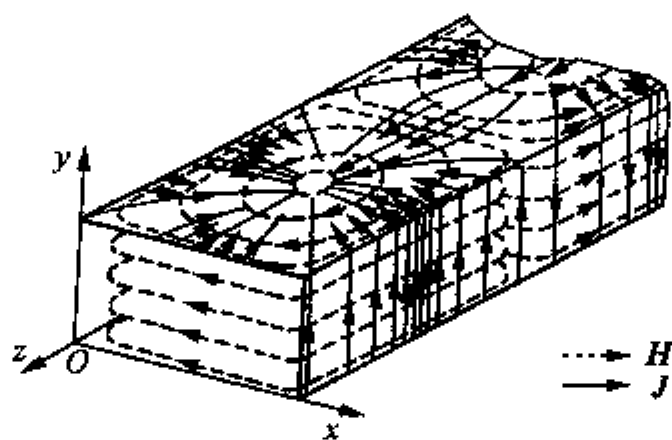


图 5.12 TE_{10}模在矩形波导管内壁上电流分布的立体图

由 TE_{10} 模的面电流分布可见，当矩形波导工作在 TE_{10} 模时，波导宽边中心开一纵向槽缝因不破坏电流分布而对场分布不产生影响。微波测量中使用的矩形波导驻波测量线就是沿波导宽边中心开一纵向窄缝而制成的测量装置，用它可以测量波导中场的驻波分布图形。同样，在矩形波导窄壁上沿 y 向的窄缝也不会切断电流线，因此这样的窄缝也不会影响传输模式的场分布，并且不会造成辐射。相反，当所开的槽缝切断电流线时，因其电流线被切断而影响电流流通，从而破坏波导中的场分布，并将引起波导中导波的辐射和反射。常用的隙缝天线就是在矩形波导宽边中心的两侧开一系列纵向窄槽或在窄壁上开一系列交错斜缝而制成的。

5.3.4 部分波的概念

矩形波导中导波的传输条件 $\lambda_c > \lambda$（或 $f > f_c$）、相速大于光速以及波导波长大于媒质中平面波的波长等现象可用部分波的概念来加以解释。这里仍以矩形波导中的 TE_{10} 模为例加以讨论。

由式(5.100)，有

$$\begin{aligned} E_y &= -j\frac{\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_{10}z} = \frac{1}{2}E_{10}\left(e^{-j\frac{\pi}{a}x} + e^{j\frac{\pi}{a}x}\right)e^{-j\beta_{10}z} \\ &= \frac{1}{2}E_{10}e^{-j\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}} - \frac{1}{2}E_{10}e^{-j\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}} \end{aligned} \qquad (5.107)$$

式中，$\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{a}_x(\pi/a) + \boldsymbol{a}_z\beta_{10} = \boldsymbol{a}_{ni}k_i$，$\boldsymbol{k}_r = -\boldsymbol{a}_x(\pi/a) + \boldsymbol{a}_z\beta_{10} = \boldsymbol{a}_{nr}k_r$，$k_i^2 = k_r^2 = (\pi/a)^2 + \beta_{10}^2 = k^2$，$E_{10} = \omega\mu a H_0/\pi$。此式表明，$TE_{10}$ 模可看作为波矢量 $\boldsymbol{k}_i$ 和 $\boldsymbol{k}_r$ 的两个平面波的叠加，波矢量 $\boldsymbol{k}_i$ 和 $\boldsymbol{k}_r$ 的方向如图 5.13 所示。波矢量 $\boldsymbol{k}_i$ 与 x 轴的夹角为 θ_i；波矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 与 x 轴的夹角为 θ_r。

由图中的几何关系可知

$$\begin{aligned} \cos\theta_i &= \boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_{ni} = \frac{\lambda}{2a} \\ \cos\theta_r &= -\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_{nr} = \frac{\lambda}{2a} \end{aligned} \qquad (5.108)$$

因此，可以把 TE_{10} 模看作是以 θ_i 角入射到波导上窄壁的平面波与由上窄壁反射且以 θ_r 角

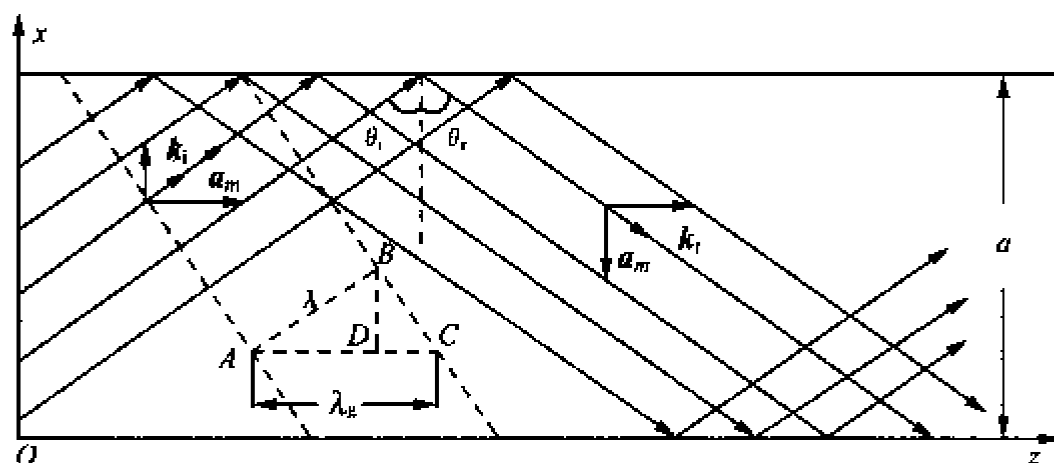


图 5.13　TE_{10}模的场视为两个平面波的场的叠加

向下窄壁投射的平面波叠加而成，即这样的波在上下窄壁间连续入射与反射，构成导行波沿波导传播。具体地，两个波的 x 向分量的叠加等效为垂直入射到导体表面的平面波在波导管内形成驻波；两个波的 z 向分量的叠加形成沿波导管的纵向传输的行波。

由图 5.13 所示，若用点线 AB 表示平面波两个波峰间的长度(即波长 λ)，则沿传播方向看，两个波峰间的距离是 AC，也就是导行波 TE_{10}模的波导波长。因此，有

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sin\theta_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta_i}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$$

面相速 v_p 为

$$v_p = \lambda_g f = \frac{\lambda f}{\sin\theta_i} = \frac{v}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$$

可见，相速 v_p 只表示沿 z 向的两个相邻等相位点的距离与频率的乘积，并不是导波能量的传播速度。此时，导波的能量在一个周期内只传输了图中 AD 的距离，即 $\lambda\sin\theta_i$。因此，沿 z 向能量的传播速度 v_e 为

$$v_e = \lambda\sin\theta_i f = v\sin\theta_i = v\sqrt{1-(\lambda/2a)^2} < v$$

并有

$$v_p v_e = v_p v_g = v^2$$

由式(5.107)可见，当 $\lambda\to 0$ 时，$\theta_i\to\frac{\pi}{2}$，相当于电磁波平行于导体平面传播，$v_p\to v$；当 $\lambda=2a$ 时，$\theta_i=0$，相当于电磁波垂直入射到导体表面上形成纯驻波，z 向没有能量的传播，这就是导波 TE_{10}模的截止。

5.3.5　矩形波导的传输功率和衰减

1) 传输功率

TE_{mn}模和 TM_{mn}模传输功率可由式(5.51)得到

$$P_{TM,TE} = \frac{1}{2Z}\int_S |\boldsymbol{E}_t|^2 dS = \frac{Z}{2}\int_S |\boldsymbol{H}_t|^2 dS \tag{5.109}$$

式中，对 TE_{mn} 模，$Z = Z_{TE}$；对 TM_{mn} 模，$Z = Z_{TM}$。

对 TE_{10} 模，其传输功率为

$$P_{TE_{10}} = \frac{1}{2Z_{TE_{10}}}\int_0^a\int_0^b |E_y|^2 dxdy = \frac{abE_{10}^2}{4Z_{TE_{10}}} \tag{5.110}$$

式中，$E_{10} = \eta(2a/\lambda)H_0$，是 E_y 分量在波导宽边中心处的振幅值。若以波导的击穿电场 E_{br} 代替式(5.110)中的 E_{10}，即得到波导传输 TE_{10} 模时的最大传输功率（或称功率容量）P_{br} 为

$$P_{br} = \frac{abE_{br}^2}{4Z_{TE_{10}}} = \frac{abE_{br}^2}{480\pi}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{5.111}$$

当矩形波导以空气作为填充媒质时，因空气的击穿场强为 30 kV/cm，因此可得

$$P_{br} = 0.6ab\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \quad \text{MW} \tag{5.112}$$

式中，a，b 和 λ_0 的单位均为厘米。

从式(5.111)可见，对 TE_{10} 模，波导截面尺寸愈大，频率愈高，则功率容量愈大；当 $\lambda/\lambda_c > 0.9$ 时，功率容量将急剧下降；当 $\lambda/\lambda_c = 1$ 时，功率容量等于零；当 $\lambda/\lambda_c < 0.5$ 时，则可能出现高次模式 TE_{20} 模。如图 5.14 所示。因此，为保证单模传输 TE_{10} 模，又要兼顾到功率容量，应取

$$0.5 < \frac{\lambda}{\lambda_c} < 0.9 \text{ 或 } a < \lambda < 1.8a \tag{5.113}$$

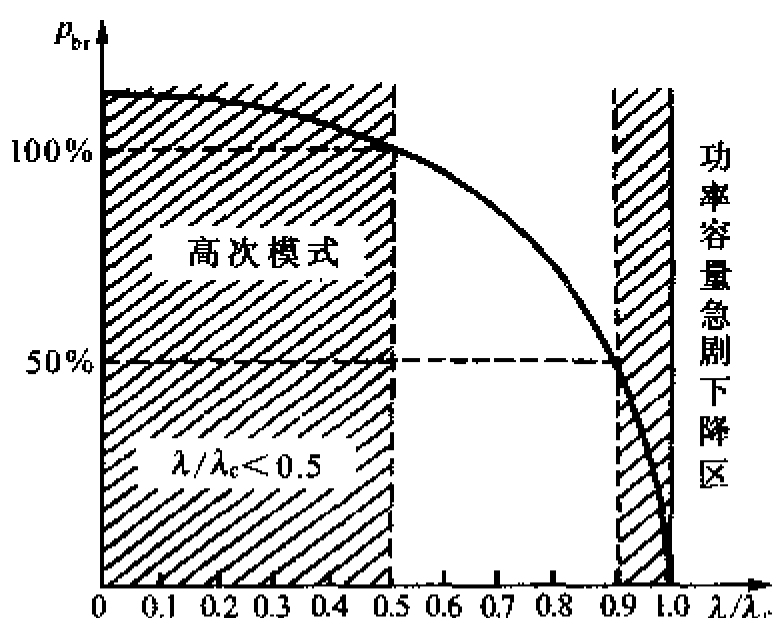


图 5.14 功率容量 P_{br} 与 λ/λ_c 的关系曲线

应指出，上述的功率容量的表达式是在行波状态下导出的，当波导终端不匹配而使波导中有反射波存在时，则功率容量应由原来的 P_{br} 变为 P_{br}'，两者间的关系为

$$P_{br}' < \frac{P_{br}}{\rho}$$

式中，ρ 为电场的驻波系数。这表明，负载不匹配时功率容量将下降。

综上所述，要提高矩形波导中导波的功率容量，一方面要尽可能地实现负载与波导的匹配，这在大功率传输时尤为重要，另一方面应设法提高击穿场强 E_{br}。为此，可在波导内充气，当其中气压高到几个大气压时，击穿场强将比通常情况下的 30 kV/cm 高出许多倍，或波导内保持真空状态。反之，若波导内空气潮湿则会使击穿场强大为降低。此外，波导内壁表面有尘埃、毛刺或波导中出现任何不均匀性都会降低功率容量。因此，在实际应用中应有一定的安全系数，一般传输功率不超过计算值的 1/4 至 1/3。

2) 损耗和衰减

前面的讨论都假设波导壁是理想导体，其电导率为无穷大（即 $\sigma = \infty$），但实际的波导壁是

由良导体制成，其电导率并非无穷大，高频电流在这种良导体壁上流过会产生功率损耗(称为热损耗)。当波导中填充介质时，还会引起介质损耗，但一般情况下，波导以空气作为填充介质，其介质损耗很小，可以忽略不计。因此，这里仅讨论波导壁的有限电导率所产生的损耗。

将矩形波导中 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模的磁场的横向分量以及磁场在内壁表面处的切向分量代入式(5.63)，即得传输 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 时的导体衰减

$$(\alpha_c)_{TM_{mn}} = \frac{2R_S}{\eta b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^3 m^2 + n^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 m^2 + n^2} \tag{5.114}$$

$$(\alpha_c)_{TE_{mn}} = \frac{2R_S}{\eta b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \left\{ \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2 + n^2\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 m^2 + n^2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right] + \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 \right\}$$

$$(m,\ n \neq 0) \tag{5.115}$$

$$(\alpha_c)_{TE_{m0}} = \frac{R_S}{\eta b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right] \tag{5.116}$$

特别地，对 TE_{10} 模，有

$$(\alpha_c)_{TE_{10}} = \frac{R_S}{\eta b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2\right] = \frac{R_S}{120\pi b}\frac{1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \tag{5.117}$$

式中，假设矩形波导中填充的是空气。

由此可见，当矩形波导的材料(R_S)一定以及 a 一定时，α_c 与 b 和 f 有关，当工作频率接近于截止频率时，衰减急剧增加；TE_{10} 模的衰减最小，且对同一工作频率，b/a 愈大，其衰减愈小。图 5.15 画出了 TE_{10} 模的衰减曲线；图 5.16 则给出了矩形波导中 TE_{10}，TE_{01}，TM_{11} 模的衰减常数随频率变化的曲线。

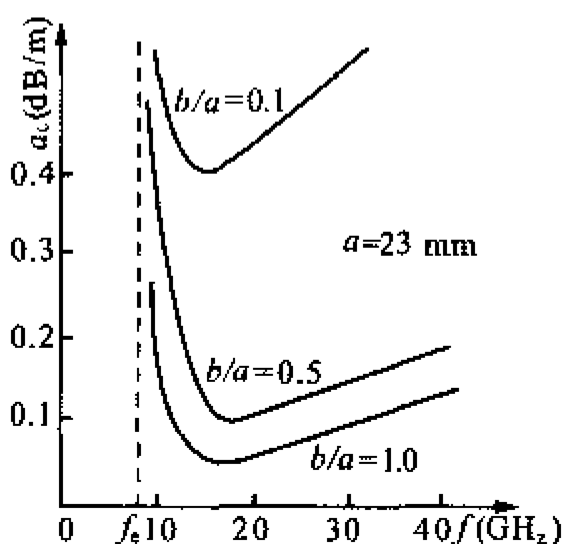


图 5.15　TE_{10} 模的衰减曲线

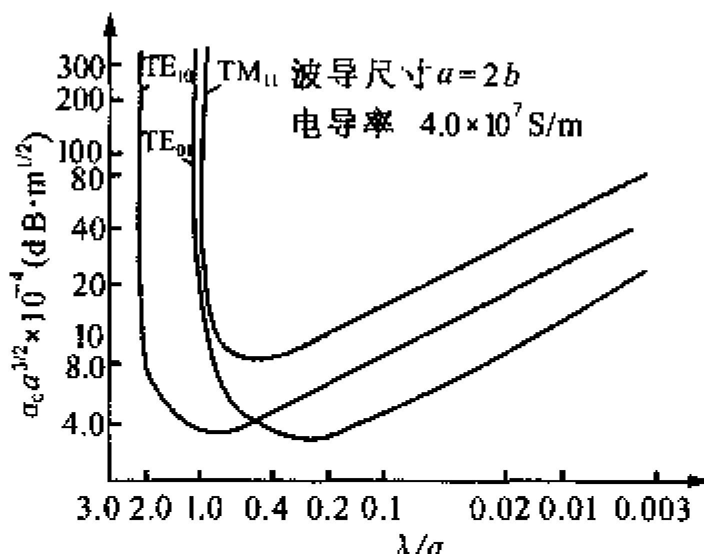


图 5.16　TE_{10}，TE_{01}，TM_{11} 模的衰减常数随频率变化的曲线

5.3.6　矩形波导的尺寸选择

矩形波导尺寸选择的一般原则是，在给定工作频带内只传输主模，有足够大的功率容量，损耗要尽可能小。

矩形波导的主模是 TE_{10} 模，为保证 TE_{10} 模处于传输状态，应使

$$\lambda < (\lambda_c)_{TE_{10}} = 2a$$

但为了只传输 TE_{10} 模，则必须抑制 TE_{20} 模和 TE_{01} 模。为此应使

$$\lambda > (\lambda_c)_{TE_{10}} = a$$
$$\lambda > (\lambda_c)_{TE_{10}} = 2b$$

于是，由上述关系得到

$$\frac{\lambda}{2} < a < \lambda \tag{5.118}$$

$$0 < b < \frac{\lambda}{2} \tag{5.119}$$

为了避免出现高次模式，获得较大的功率容量，应使 $a < \lambda < 1.8a$。因功率容量同 b 成正比，为了获得较大的功率容量，显然 b 应选得大些。但考虑抑制高次模式，一般选 $b = 0.5a$。

再考虑到损耗尽可能小的要求，由式(5.117)可知，应使

$$\frac{\lambda}{2a} \leqslant 0.7,\ \frac{b}{a} = 0.5$$

综合上述条件，矩形波导的尺寸应选为

$$a = 0.7\lambda \tag{5.120a}$$

$$b = (0.4 \sim 0.5)a \tag{5.120b}$$

根据工作波长由式(5.120a)即可确定波导的宽边尺寸，然后对照矩形波导的标准系列选用合适的波导。通常选择波导窄边尺寸 b 大约为宽边尺寸 a 的一半，即 $b = 0.5a$。这是因为当选择 $b > 0.5a$ 时，会使波导的工作频带变窄。反之，当选择 $b < 0.5a$ 时，波导的工作频带并不增加，却降低了功率容量。所以，$b = 0.5a$ 是在保证频带宽度下达到最大功率容量的一种选择，标准波导就是根据这个原则设计的。在大功率情况下，为提高功率容量，而工作频带又要求不太宽的情况下，有时也选择 $b > 0.5a$ 波导，这种波导称为加高波导；在小功率情况下，为减小体积，减轻重量，或为满足某种特殊要求，有时也选用 $b < 0.5a$ 的波导，这种波导称为扁波导。

附录 D 中给出了标准矩形波导参数和型号对照表，使用时可根据要求选用。

5.4　同轴线中的导波

同轴线是一种双导体传输系统，由同轴的两根圆柱导体构成，如图 5.17 所示。其中 a

表示内导体的半径,b 表示外导体的内半径。同轴线是微波技术中最常用的 TEM 模传输线,分为硬、软两种结构型式。硬同轴线的内导体是圆柱形铜棒(或铜线),外导体是同心的铜管,内、外导体间一般用介质块支撑,这种同轴线又称为同轴波导。软同轴线的内导体一般是一股铜线或多股铜丝,外导体是细铜丝编织成的圆筒形网,在外导体网的外面有一层橡皮保护层,以免铜网损坏,这种同轴线又称为同轴电缆。同轴线常用于微波波段的低频端作为传输线或用来制作宽频带的微波元器件。

同轴线中的主模是 TEM 模,但当设计不当(同轴线的横截面尺寸与工作波长相比拟)时也会产生 TE 模和 TM 模。下面分别讨论同轴线的主模、传输功率、损耗及尺寸选择。

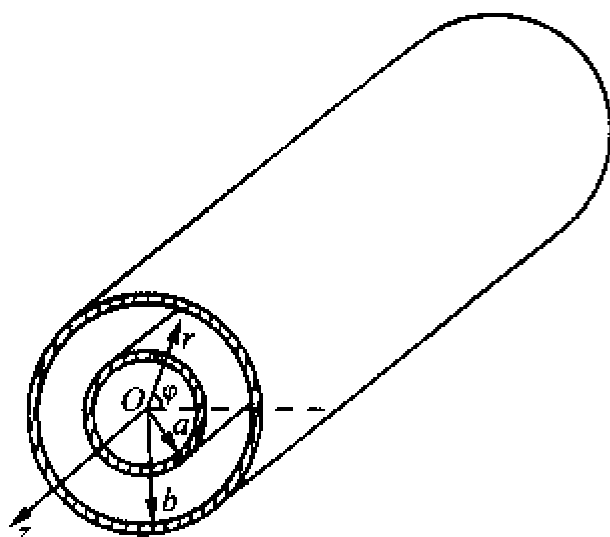


图 5.17 同轴线及圆柱坐标系

5.4.1 同轴线中的主模——TEM 模

假设同轴线由理想导体制成,内、外导体间填充无耗介质。因同轴线的结构具有轴对称性,故采用圆柱坐标系分析较为方便。如图 5.17 所示。

由于 TEM 模的场在同轴线横截面上的分布与二维静态场相同,因此只要求解相应的二维静态场的方程就可求得其二维分布函数。若设同轴线外导体的电位为零,内导体电位为 V_0,导体间的电位函数为 $V(r,\varphi)$,则 $V(r,\varphi)$ 应满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla_t^2 V(r,\varphi)=0 \tag{5.121}$$

在圆柱坐标系下,上面方程变为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0$$

对沿周向均匀分布的场,$\dfrac{\partial}{\partial\varphi}=0$,则上式变为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)=0$$

将上式积分两次,可得

$$V=C_1\ln r+C_2$$

利用边界条件:$V|_{r=a}=V_0$,$V|_{r=b}=0$,可得

$$V(r,\varphi)=V_0\frac{\ln\left(\dfrac{r}{b}\right)}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)} \tag{5.122}$$

于是,根据式(5.19)和式(5.20),可得同轴线中 TEM 模的电磁场的表达式为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla_t V \mathrm{e}^{-jkz} = -\boldsymbol{a}_r \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{e}^{-jkz} = \boldsymbol{a}_r \frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\mathrm{e}^{-jkz} \tag{5.123}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{Z_{\mathrm{TEM}}}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{V_0}{rZ_{\mathrm{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\mathrm{e}^{-jkz} \tag{5.124}$$

同轴线传输 TEM 模时的电磁场分布如图 5.18 所示。由图可见，愈靠近内导体表面电磁场愈强，这表明内导体表面的电流密度比外导体内表面的电流密度强得多，因此同轴线的导体损耗主要发生在截面尺寸较小的内导体表面上。根据 TEM 模的磁场分布，不难判断 TEM 模的壁面电流沿同轴线的轴线方向。工程上利用 TEM 模壁面电流的这一特点，在同轴线外导体上开纵向槽缝来制作与矩形波导驻波测量线相似的同轴驻波测量线，用以测量同轴线中传输的导波的驻波系数。

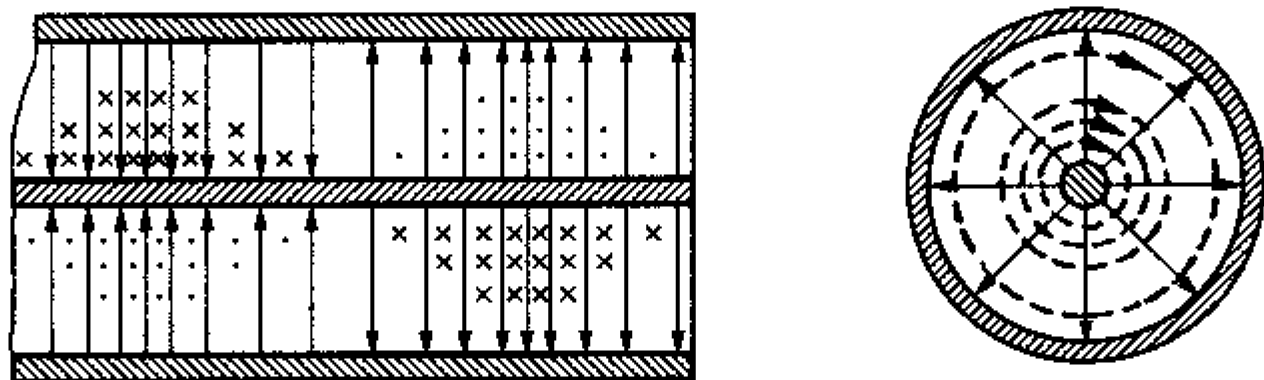


图 5.18　同轴线中 TEM 模的场分布图

由式(5.123)知，同轴线中的行波电压可表示为

$$U = V_0 \mathrm{e}^{-jkz} \tag{5.125}$$

内导体上的面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_z \frac{V_0}{aZ_{\mathrm{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\mathrm{e}^{-jkz} \tag{5.126}$$

总的电流为

$$I_0 = \frac{V_0}{aZ_{\mathrm{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\int_0^{2\pi} a\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)Z_{\mathrm{TEM}}} \tag{5.127}$$

于是，内导体上的行波电流为

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-jkz} = \frac{2\pi V_0}{Z_{\mathrm{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\mathrm{e}^{-jkz} \tag{5.128}$$

因假设同轴线内、外导体间填充非磁性媒质，故由式(5.125)和式(5.128)可得同轴线的特性阻抗为

$$Z_c = \frac{U}{I} = Z_{\mathrm{TEM}}\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon_r}}\lg\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5.129}$$

常用同轴线的特性阻抗为 50 Ω 和 75 Ω。

同轴线的 TM 模和 TE 模的分析方法同圆形金属波导情况相似，暂不讨论。这里只提供同轴线中高次模式的截止波长的近似计算公式，以便确定同轴线单模传输 TEM 模的传输条件。

对于 TM 模，有

$$\lambda_c \approx \frac{2}{n}(b-a) \tag{5.130}$$

显然，TM_{01} 模的截止波长近似为 $2(b-a)$，TM_{02} 模的截止波长近似为 $(b-a)$，…。当 $b/a<3$ 时，上式与精确值之间的误差仅为百分之几，且随着 n 增大，其误差会更小。此外，从上式还可看出，TM 模的 λ_c 值与 m 无关。因此，若有 TM_{01} 模存在，则可同时有 TM_{11}，TM_{21}，… 简并模式存在，故要保证同轴线中只传输 TEM 模应避免 TM 模存在。

对于 TE 模，有

$$\lambda_c = \begin{cases} \dfrac{\pi(b+a)}{m}, & m=1,2,\cdots \quad (TE_{m1}\text{ 模}) \\ \dfrac{2(b-a)}{n}, & n=1,2,\cdots \quad (TE_{0n}\text{ 模}) \end{cases} \tag{5.131}$$

由此可见，同轴线中的最低次 TE 模为 TE_{11}，它也是同轴线的最低次高次模式，其截止波长为

$$(\lambda_c)_{TE_{11}} = \pi(b+a) \tag{5.132}$$

图 5.19 画出了同轴线中 TM 模和 TE 模的截止波长分布图。由图可见，要保证同轴线只传输 TEM 模，而将 TM 模和 TE 模作为高次模式抑制掉，则只需使 TE_{11} 模处于截止状态即可，即工作波长满足以下关系：

$$\lambda > (\lambda_c)_{TE_{11}} = \pi(b+a) \tag{5.133a}$$

或选择同轴线的尺寸 a，b，使其满足

$$(a+b) < \frac{\lambda}{\pi} \tag{5.133b}$$

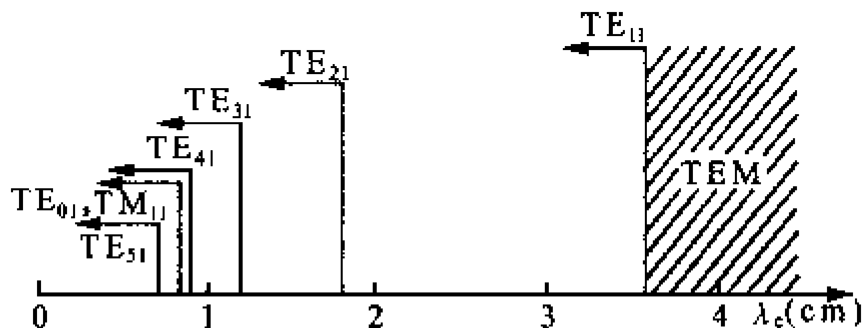


图 5.19 同轴线中 TM 模和 TE 模的截止波长分布图

上式是选择同轴线尺寸时必须考虑的一个因素。

5.4.2 同轴线的传输功率、衰减和尺寸选择

1）传输功率

在行波状态下，同轴线传输 TEM 模时的传输功率可由式(5.123)代入式(5.53)得到，即

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2Z_{TEM}}\int_S |\boldsymbol{E}_t|^2 \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{V_0^2}{Z_{\text{TEM}}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2 r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi V_0^2}{Z_{\text{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{2}V_0 I_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[UI^*] = \frac{V_0^2}{2Z_c} \tag{5.134}$$

从式(5.123)可看出，同轴线中 TEM 模的最大电场的值应在内导体表面处出现，其值为

$$|\boldsymbol{E}|_{\max} = \frac{V_0}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

当最大场强达到击穿程度，即 $|\boldsymbol{E}|_{\max} = E_{\text{br}}$ 时，此时的功率即为同轴线的击穿功率(或功率容量)，于是有

$$P_{\text{br}} = \frac{\pi a^2 E_{\text{br}}^2}{Z_{\text{TEM}}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120}a^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)E_{\text{br}}^2 \tag{5.135}$$

2) 衰减

当同轴线传输 TEM 模时，由同轴线的内、外导体引起的导体衰减可用式(5.63)计算，即

$$\alpha_c = \frac{R_S\oint_l |\boldsymbol{H}_t|^2\mathrm{d}l}{2Z_{\text{TEM}}\int_S |\boldsymbol{H}_t|^2\mathrm{d}S} = \frac{\dfrac{V_0^2 R_S}{Z_{\text{TEM}}^2\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\mathrm{d}\varphi}{\dfrac{4\pi V_0^2}{Z_{\text{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \tag{5.136}$$

$$= \frac{R_S}{2Z_{\text{TEM}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left(\frac{b+a}{ab}\right) = \frac{R}{2Z_c}$$

式中，R 为同轴线单位长度的电阻，R 和表面电阻 R_S 间的关系为

$$R = R_S\left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{2\pi b}\right) \tag{5.137}$$

一般情况下，硬同轴线以空气为填充介质，其介质损耗很小，可不予考虑。对于同轴电缆，由介质损耗引起的衰减常数为

$$\alpha_d = \frac{\pi}{\lambda}\tan\delta \tag{5.138}$$

于是，总的衰减常数为

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d = \frac{R_S\left(\frac{a+b}{ab}\right)}{2\eta\ln(b/a)} + \frac{\pi}{\lambda}\tan\delta \tag{5.139}$$

3) 尺寸选择

选择同轴线尺寸的原则是：保证在给定的工作频带内只传输 TEM 模，传输功率尽可能

大,衰减尽可能小。

(1) 为保证只传输 TEM 模,最短的工作波长与同轴线的尺寸之间必须满足以下关系:

$$\lambda_{min} \geqslant \pi(a+b)$$

或

$$(a+b) \leqslant \frac{\lambda_{min}}{\pi} \tag{5.140}$$

(2) 为保证传输功率大,在保证只传输 TEM 模的情况下,若限定 b 值,则功率容量最大的条件是 $\frac{dP_{br}}{da}=0$。将式(5.135)代入可得

$$\frac{b}{a} \approx 1.65 \tag{5.141}$$

若同轴线以空气作为填充介质,则满足此尺寸关系的同轴线的特性阻抗为 30 Ω。

(3) 若限定同轴线的 b 值,则导体衰减最小的条件是 $\frac{d\alpha_c}{da}=0$。将式(5.136)代入可得

$$\frac{b}{a} \approx 3.59 \tag{5.142}$$

若同轴线以空气作为填充介质,则满足此尺寸关系的同轴线的特性阻抗为 76.71 Ω。

一般地,若要兼顾衰减小和功率容量大,则选取

$$\frac{b}{a} \approx 2.303 \tag{5.143}$$

此时,对应以空气作为填充介质的同轴线的特性阻抗为 50 Ω。

同轴线已有标准化尺寸,详见附录 E。

习　　题

5-1 试从不同角度说明,在空心金属波导管中不能传输 TEM 模。

5-2 证明截止波导的波阻抗对 TE 模呈感性,对 TM 模呈容性。

5-3 导行波的相速、群速和电磁场能量的传播速度间的关系是什么?群速存在的条件是什么?

5-4 证明:在金属波导内,对传输型 TM_{mn}, TE_{mn} 模式,其平均电场能量密度等于平均磁场能量密度,即 $(w_e)_{av}=(w_m)_{av}$;对截止型 TE_{mn} 模式,其平均电场能量密度小于平均磁场能量密度,即 $(w_e)_{av}<(w_m)_{av}$;对截止型 TM_{mn} 模式,其平均电场能量密度大于平均磁场能量密度,即 $(w_e)_{av}>(w_m)_{av}$。

5-5 证明空心金属波导中 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$。

5-6 采用多种方法,推导填充有耗介质(电导率为 σ)的金属波导的介质衰减常数 α_d 的表

达式。

5-7　设在相距为 b 的两块无限大金属平行板间传播的电磁波的纵向场分量为

$$E_z(x, y, z)=0;\ H_z(x, y, z)=H_0\cos\frac{\pi}{b}y\mathrm{e}^{-j\beta z}$$

① 求其余各场分量，说明这是什么传输模式，最低次模式是什么？

② 导出 λ_c，λ_g，v_p，v_g 的表达式；

③ 画出金属板上面电流的分布图。

5-8　空气填充的矩形波导的尺寸 $a\times b=(22.86\times10.16)\,\mathrm{mm}^2$，当信号源的波长分别为 10 cm，8 cm 和 3.2 cm 时，问：哪些波长的波可以通过此波导，波导内可传输哪些模式？若信号源的波长仍如上所述，而波导的尺寸为 $a\times b=(72.14\times30.4)\,\mathrm{mm}^2$，此时情况又如何？

5-9　矩形波导中填充 $\epsilon_r=9$ 的理想介质，波导尺寸 $a\times b=(23\times10)\,\mathrm{mm}^2$，试求 TE_{10}，TE_{20}，TM_{11} 和 TE_{11} 模的截止波长 λ_c。若要求只传输 TE_{10} 模，工作波长 λ_0 的范围应为多少？

5-10　一尺寸为 $a\times b\ \mathrm{mm}^2$，填充空气的矩形波导传输 TE_{10} 模，当工作频率 $f_0=9.375\,\mathrm{GHz}$ 时，波导波长 $\lambda_g=4.5\,\mathrm{cm}$。试求工作频率 $f_0=9.8\,\mathrm{GHz}$ 时的波导波长。

5-11　矩形波导 BJ-100 的尺寸为 $a\times b=(22.86\times10.16)\mathrm{mm}^2$，传输频率为 10 GHz 的电磁波。求截止波长 λ_c、波导波长 λ_g、相速 v_p 和波阻抗 Z。当频率 f 稍上升时，上述各参量如何变化？当宽边 a 稍增大时，上述各参量如何变化？当窄边 b 稍增大时，它们又怎样变化？

5-12　一工作频率为 10 GHz 的 TE_{11} 模在由空气填充的矩形波导内传输，其纵向场分量 $H_z=10^{-8}\cos(\pi x/3)\cos(\pi y/3)\mathrm{e}^{-j\beta z}\,\mathrm{A/m}$，其中矩形波导的尺寸 a，b 的单位为 cm。① 求 λ_c，λ_g，v_p，v_g；② 写出其他场分量的表达式。

5-13　一尺寸为 $a=2b=2.5$ cm 的空气矩形波导传输调制波 $(1+m\cos\omega_m t)\cos\omega t$，其中 $f_m=20\,\mathrm{kHz}$，$f=10\,\mathrm{GHz}$。求该波导长度 l，使上边频与下边频有 $180°$ 的相位差。

5-14　试证明矩形波导中 TM_{mn} 模在 $f=\sqrt{3}f_c$ 时，其导体衰减出现最小值。

5-15　矩形波导的尺寸为 $a\times b=(2.3\times1.0)\,\mathrm{cm}^2$，波导管用铜 $(\sigma=5.8\times10^7\ \mathrm{S/m})$ 制作，长为 100 m，内充空气。一工作频率 $f=\sqrt{2}(f_c)_{TE_{10}}$ 的电磁波以主模在波导内传播。试求主模通过此波导管引起的总的衰减。

5-16　空气填充的 BJ-32 波导传输波长为 10 cm 的电磁波，求传输 TE_{10} 模的极限功率 P_{br}。若波导长 100 m，求导体衰减的分贝数（波导材料为黄铜）。

5-17　一个空气填充的矩形波导，其尺寸为 $a\times b=(23\times10)\,\mathrm{mm}^2$，长为 0.5 m，传输 TE_{10} 模。若将其终端短路，测得第一个电场的波节点距终端为 20 mm，现欲在距终端 45 mm 处的横截面内得到幅值相等的 H_x 和 H_z。求在直角坐标系中的 x 和 y 的值。

5-18　一由空气填充的矩形波导尺寸为 $a\times b=(5\times2.25)\,\mathrm{cm}^2$。

① 若工作频率 $f=1\,\mathrm{GHz}$，TM_{21} 模可否传播？求 TM_{21} 模的传播常数；

② 若 f 仍同①，且已知波导中 $z=0$ 处 TM_{21} 模的电场纵向分量 E_z 的幅值为 1 kV/m，

试确定使 TM_{21} 模的 E_z 的幅值衰减到 $z=0$ 处的 0.5%所需的距离；

③ 若工作频率 $f=20\ \text{GHz}$，TM_{21} 模可否传播？若可传播，求出其相位常数和波导波长。

5-19 已知一由空气填充的矩形波导的横截面尺寸为 $a\times b=(23\times 10)\ \text{mm}^2$，其中传输 TM_{11} 模的两个磁场分量为

$$H_x=\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\pi}{b}E_0\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}e^{-j\beta z}$$

$$H_y=-\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\pi}{a}E_0\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{-j\beta z}$$

① 求 TM_{11} 模的截止频率 f_c；

② 当信号源频率 f_0 为截止频率 f_c 的两倍时，求此模式的传播常数 γ、波导波长 λ_g 及波阻抗 Z_{TM}；

③ 设信号源频率 $f_0'=f_c/2$，再求此模式的传播常数 γ 及波阻抗 Z_{TM}；

④ 导出波导内壁上的面电流密度的表达式。

5-20 试写出正方形金属波导中的简并模式。

5-21 证明：矩形波导中 TE_{10} 模的传导电流与位移电流满足全电流连续性方程。

5-22 借助相关公式说明，为什么驻波测量线的纵向槽缝开在矩形波导的宽壁中心？

5-23 一驻波测量线的矩形波导尺寸为 $a\times b=(2.54\times 1.27)\ \text{cm}^2$，当用此测量线测量一信号源的频率时，测得驻波测量线中两波节点间的距离为 3 cm。求所测信号源的工作频率。

5-24 一由空气填充的矩形波导的尺寸为 $a\times b=(2.0\times 1.0)\ \text{cm}^2$，频率为 10 GHz 的电磁波以 TE_{10} 模传播，已知波导窄壁上面电流密度的幅值为 0.5 A/m。

求：①波导中平均功率密度的最大值；

②波导中单位长度总的平均电磁场能量。

5-25 一由空气填充的同轴线，其内导体的半径 $a=5\ \text{mm}$，外导体的内半径 $b=5.6a$。求只传输 TEM 模时，最短的工作波长为多少？

5-26 有一空气同轴线需装入介质支撑薄片，介质薄片的相对介电常数为 2.55，如图 5.20 所示。为使介质薄片的装入不引起反射，介质中心直径 d' 应为多少？

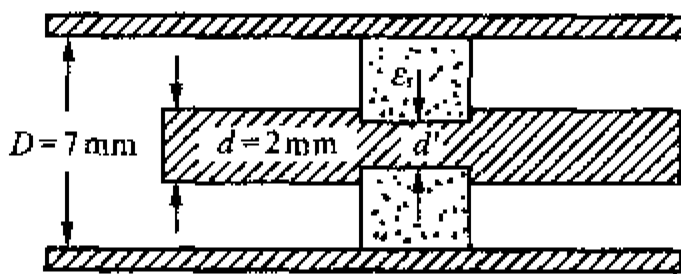


图 5.20 题 5-26 附图

第6章 天线Ⅰ——电磁波的辐射和接收的理论基础

在前面有关章节中，我们讨论了电磁波在自由空间中的传播，在不同媒质分界面上的反射、透射以及导行电磁波在各种传输线或传输系统中的传播等问题，但并未涉及空间中传播的电磁波是如何产生的。电磁波能够脱离场源以电磁波的形式在空间中传播的现象，称为电磁波的辐射。无线电设备中用来辐射和接收电磁波的装置称为天线。天线是无线电通信、雷达、导航、遥感、遥测，射电天文以及电子对抗等各种民用和国防系统中必不可少的组成部分之一。

本章在引入有关辐射和滞后位概念的基础上，首先介绍基本电、磁振子的辐射原理以及天线的基本参数；然后讨论对称振子、天线阵的远区辐射特性；最后介绍与接收天线有关的基本理论。

6.1 辐射的基本概念和滞后位

6.1.1 辐射的基本概念

根据麦克斯韦的两个旋度方程可知，磁场不仅能由传导电流产生，而且能由随时间变化的电场产生；电场不仅能由电荷产生，而且能由随时间变化的磁场产生。由于一般情况下电场随时间的变化率是可变的，因此由电场产生的磁场也是随时间变化的，这个变化的磁场又将激发出新的变化电场。由此可见，随着时间变化的电磁场，其电场和磁场永远是相互联系而不能分隔的，形成统一的电磁场。所以，假设自由空间中某一给定区域中的电场有变化，变化的电场在邻近区域激起变化的磁场，这个变化的磁场又在较远处的区域激起新的变化的电场，而后又在更远的区域激发出变化的磁场……依此类推，这种由近及远，交替激起电场和磁场的过程，就是电磁波产生的过程，即电磁波的辐射过程。

怎样才能使一种装置(或电路)用作有效辐射电磁波的天线呢？一方面，某装置的工作频率要尽可能高，这是因为电磁波的辐射依赖于变化的电场(即位移电流)和变化的磁场，因此电磁场变化的快慢决定着所激发场的强弱，也就决定着辐射能量的多少。换言之，在一定场强下，频率越高，位移电流越强，从而辐射的能量也越多。所以，某装置的波源频率是直接影响其辐射的一个因素。另一方面，装置的场源结构必须是开放系统，从

而使波源激发出的电场和磁场分布在同一空间。例如，施加在两块平行导体板间的波源激发的电磁场主要束缚在两极板之间，大部分电磁场能量在场与源之间来回转换，其辐射能力很弱，但若将两块导体板拉开呈开放结构，则将形成与空间耦合很强的系统，就可获得很强的辐射。

综上所述，一种装置可用作为天线必须具备两个条件：①波源的频率要高，频率越高，辐射的潜在能越大；②结构应呈开放型式。

6.1.2 时谐场的滞后位

由于空间电磁波的场源是天线上的时变电流和电荷，因此辐射问题就是求解天线上的场源在其周围空间所产生的电磁场分布。严格地说，空间电磁场的求解就是在天线几何形状确定的边界条件下解麦克斯韦方程组。这在绝大多数情况下显然是十分困难甚至是不可能的。因此，辐射问题的求解往往采用近似解法，即先近似选取天线上的场源分布，再根据场源分布求天线辐射场。根据天线的场源分布求其辐射空间的电磁场，可采用直接解法和间接解法。直接解法就是根据电磁场的复矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的非齐次矢量亥姆霍兹方程，由天线的电流分布直接求解 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，这种解法的积分运算十分复杂；间接解法就是先由天线上的电流分布求解矢量磁位 $\boldsymbol{A}$，再由 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 间的微分关系求得 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。这种解法的积分运算通常比直接解法要简单得多，因此多采用间接解法求解天线的辐射问题。下面先导出位函数的积分表达式，并由此引出滞后位的概念，后面各节再讨论采用间接解法求解具体天线辐射场的问题。

由式(2.102)可知，若自由空间中有限区域内有时谐的体电流和体电荷分布，则矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量电位 V 分别满足以下方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{6.1}$$

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.2}$$

式中，$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$。

方程(6.2)在自由空间中任一点 $p(\boldsymbol{r})$ 处的解可写成以下形式：

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}V' \tag{6.3}$$

此式表示体积 V' 内的体电荷在点 $p(\boldsymbol{r})$ 处产生的电位，R 是电荷元 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$ 到点 $p(\boldsymbol{r})$ 处的距离，即 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$。不失一般性，下面在直角坐标系下证明式(6.3)满足方程(6.2)。

将直角坐标系下的式(6.3)代入方程(6.2)的左端，并注意到 ∇^2 是对场点坐标 (x, y, z) 作用，而体积分是对源点坐标 (x', y', z') 进行的，因此

$$\begin{aligned}\nabla^2 V + k^2 V &= \nabla^2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(x', y', z')\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}V'\right) + k^2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(x', y', z')\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}V'\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(x', y', z')\left[\nabla^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\right) + k^2\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\right]\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{6.4}$$

由于

$$\nabla^2\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)=-k^2\frac{e^{-jkR}}{R}+e^{-jkR}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) \tag{6.5}$$

将上式代入式(6.4)，并利用第 1 章中习题 1－18 的结果，得

$$\begin{aligned}\nabla^2 V+k^2V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(x',y',z')\left[e^{-jkR}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\right]dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(x',y',z')e^{-jkR}[-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]dV' \\ &= -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{6.6}$$

从而得证。

由于矢量磁位方程(6.1)可分解为三个标量方程，而每个标量方程都同方程(6.2)类似，其解的形式也类似。因此，若时谐电流以体密度 $\boldsymbol{J}$ 分布在有限体积 V' 中，则此体电流在场点 $p(\boldsymbol{r})$ 处产生的矢量磁位为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')e^{-jkR}}{R}dV' \tag{6.7}$$

这就是矢量磁位方程(6.1)在自由空间中场点 $p(\boldsymbol{r})$ 处的解。

由式(6.7)和式(6.3)容易得到 $\boldsymbol{A}$ 和 V 的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)\right]}{R}dV' \tag{6.8}$$

$$V(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)\right]}{R}dV' \tag{6.9}$$

式中，相位因子 $\cos[\omega(t-R/v)]$ 表明，自由空间中离开源点为 R 的观察点在某一时刻 t 的位场 $\boldsymbol{A}$ 和 V 是由时谐电流和电荷激发的，但它并不取决于同一时刻 t 的电流源和电荷源，而是取决于 $(t-R/v)$ 时刻的源。换言之，观察点的位场变化滞后于波源的变化，滞后时间为 R/v，这个时间即是电磁波在自由空间中传播距离 r 所需的时间。因此，通常称 $\boldsymbol{A}$ 为滞后矢量磁位，V 为滞后标量电位。

这样，根据时谐电流源解得复矢量 $\boldsymbol{A}$ 后，即可按以下两式确定复矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$：

$$\boldsymbol{E}=-j\omega\boldsymbol{A}-j\frac{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\omega\mu_0\varepsilon_0} \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{6.11}$$

这正是式(2.78)和式(2.76b)的复数表达形式。

6.2 电流元和磁流元的辐射

6.2.1 电流元

1) 电流元的电磁场

电流元又称为基本电振子或电偶极子，指的是无限小的线性电流单元，即其长度远小于工作波长 λ，线上的电流振幅和相位处处相同(均匀分布)。任何实际天线上的电流不可能均匀分布，但电偶极子是具有同电流元相似结构和特点的实际振子，而且任何实际的线天线都可以分解为许许多多个电流元，所以分析和推导电流元的辐射场具有实际意义。根据前一节介绍的辐射场的间接解法，容易导出电流元在自由空间中产生的电磁场。

将电流元沿圆球坐标系的 z 轴放置，使它的中心与坐标原点重合，电流沿正 z 轴方向，如图 6.1 所示。在式(6.7)中，因 $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V' = J\mathrm{d}S\mathrm{d}z = \boldsymbol{a}_z I\mathrm{d}z$，故

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{I\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}z = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 Il}{4\pi R}\mathrm{e}^{-jkR} = \boldsymbol{a}_z A_z \tag{6.12}$$

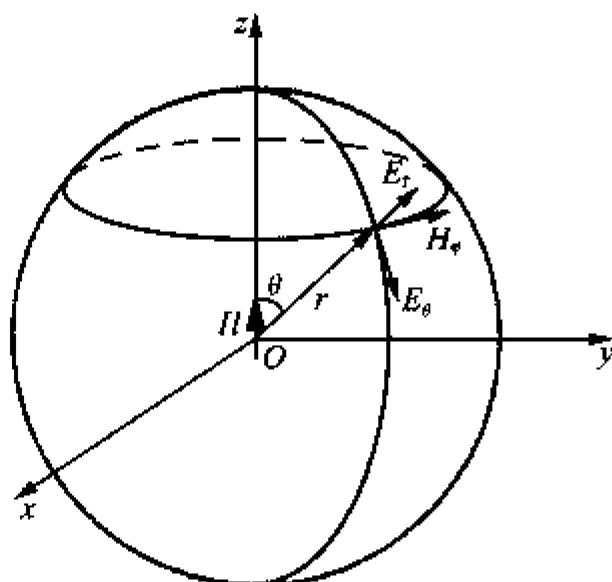


图 6.1 电流元的电磁场

此式对点电流元是精确的，对 $l \ll \lambda$ 的电流元则是近似精确的。

将式(6.12)代入式(6.11)，可得

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\boldsymbol{a}_z A_z) = \frac{1}{\mu_0}(\nabla A_z)\times\boldsymbol{a}_z + \frac{1}{\mu_0}A_z(\nabla\times\boldsymbol{a}_z) = \frac{1}{\mu_0}(\nabla A_z)\times\boldsymbol{a}_z \tag{6.13}$$

式中利用了场论恒等式，并注意到$(\nabla\times\boldsymbol{a}_z)=0$。将式(6.12)代入式(6.13)，并将其在圆球坐标系下展开，得

$$\boldsymbol{H} = \nabla\left(\frac{Il\,\mathrm{e}^{-jkR}}{4\pi}\right)\times\boldsymbol{a}_z = \frac{Il}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\right)(\boldsymbol{a}_R\times\boldsymbol{a}_z) = \frac{Il}{4\pi}\left(\frac{-jk\,\mathrm{e}^{-jkR}}{R} - \frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R^2}\right)(\boldsymbol{a}_R\times\boldsymbol{a}_z)$$

因 $\boldsymbol{a}_R\times\boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_R\times(\boldsymbol{a}_R\cos\theta - \boldsymbol{a}_\theta\sin\theta) = -\boldsymbol{a}_\varphi\sin\theta$，故上式变为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\varphi\frac{Il}{4\pi}\sin\theta\left(\frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2}\right)\mathrm{e}^{-jkR} \tag{6.14}$$

由于

自由空间中的场点无源($\boldsymbol{J}=0$)，因此 $\boldsymbol{E}$ 可不用式(6.10)求解，而是直接利用麦克斯韦方程(2.99b)求出，即

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{a}_R\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi\sin\theta) - \boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)\right] = \boldsymbol{a}_R E_R + \boldsymbol{a}_\theta E_\theta \tag{6.15}$$

式中

$$E_R = \frac{\eta_0 Il}{2\pi R^2}\cos\theta\left(1+\frac{1}{jkR}\right)e^{-jkR} \tag{6.16}$$

$$E_\theta = j\,\frac{\eta_0 kIl}{4\pi R}\sin\theta\left(1+\frac{1}{jkR}-\frac{1}{k^2R^2}\right)e^{-jkR} \tag{6.17}$$

可见，电流元的磁场只有沿 φ 向的分量 H_φ；电场只有沿 R 向和 θ 向的分量 E_R 和 E_θ；电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直。若用电力线 $\boldsymbol{E}$ 和磁力线 $\boldsymbol{H}$ 描述电流元产生的电场和磁场，则其电力线处于圆球的子午面（包括电流元轴线的平面）内，而其磁力线则与圆球的赤道面（$\theta = 90°$ 的平面）平行。

由式(6.14)和式(6.15)可知，电流元的三个场分量都随距离 R 的增加而减少，通常按距离 R 的大小将电流元的电磁场分成三个区域：近区、远区和中间区。近区和远区的分界点，按式(6.14)中括号内的两项大小相等得到，即 $kR = 1$。

(1) 近区场

近区指的是 $kR \ll 1$，即 $R \ll \lambda/2\pi$（但 $R \gg l$）的区域，在此区域中，$1 \ll 1/kR \ll 1/k^2R^2$，$e^{-jkR} \approx 1$。于是，式(6.14)和式(6.15)可近似为

$$H_\varphi = \frac{Il}{4\pi R^2}\sin\theta \tag{6.18}$$

$$E_R = -j\,\frac{Il}{2\pi R^3}\,\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\cos\theta \tag{6.19}$$

$$E_\theta = -j\,\frac{Il}{4\pi R^3}\,\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\sin\theta \tag{6.20}$$

在此区域中由于场的滞后效应不明显，故其电场的表达式与静电场中电偶极子的电场表达式相同，而磁场的表达式与恒定电流元的磁场的表达式相同，所以此区域中的场称为似稳场或感应场。从电流元的三个场分量的表达式还可看出，电场和磁场之间存在90°的相位差，根据坡印亭矢量与场量间的关系可知，此时平均功率流密度近似等于零（$\boldsymbol{S}_{av} \approx 0$），即电磁场能量被束缚在电流源附近，电场能量和磁场能量相互转换，不存在能量传输。当然，这只是一种近似，不能简单地得出近区场不存在能量辐射的结论。事实上，上述公式中被略去的较小项在近区仍然存在，这些项正是代表了向外传输的实功率对应的场量。

(2) 远区场

远区指的是 $kR \gg 1$，即 $R \gg \lambda/2\pi$ 的区域。在此区域中，$1 \gg 1/kR \gg 1/k^2R^2$，此时电流元的电磁场主要由具有 $1/R$ 的项决定，而具有 $1/R^2$ 及 $1/R^3$ 的项可以忽略不计。一般的实用天线都工作于远区。这样，在式(6.14)及式(6.15)中仅保留含有 $1/R$ 的项，有

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{\eta_0 Il}{2\lambda R}\sin\theta\, e^{-jkR} \\ H_\varphi &= j\,\frac{Il}{2\lambda R}\sin\theta\, e^{-jkR} \end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

由此可知此区域中的场具有以下主要特点：① 电场只有一个分量 E_θ，磁场也只有一个分量

H_φ，它们相互垂直，且垂直于径向($\boldsymbol{a}_R$)，故其复坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*/2=\boldsymbol{a}_R\,|E_\theta|^2/2\eta_0$。可见 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_{av}$，且指向 $\boldsymbol{a}_R$。这说明电流元的远区辐射场是一个沿径向传播的 TEM 波，即电磁场能量沿径向辐射，所以远区场又称为辐射场；② 无论是 E_θ 还是 H_φ，其空间相位因子均为 $e^{-j\beta R}$，即远区辐射场的等相位面是球面，其对应的 TEM 波是球面波。显然，当 R 很大时，球面上某一很小区域上的波可视为平面波。因 $E_\theta/H_\varphi=\eta_0$，故 E_θ 和 H_φ 同相；③ E_θ 及 H_φ 均与距离 R 成反比，与电流及电流元的电长度(l/λ)成正比，这是因为辐射场来源于波源之故；④ 场的振幅与极角 θ 有关，即正比于 $\sin\theta$，但与方位角 φ 无关。这表明电流元的远区辐射场具有方向性，在相同距离 R 的情况下不同方向(θ 变化)上的各点场强不同。辐射场的方向性是天线的一个主要的特征。

(3) 中间区场

中间区是介于近区和远区之间的区域，在此区域内，电流元的电磁场与 $1/R$，$1/R^2$，$1/R^3$ 的项成正比，各项的大小相差不多，故不可忽略任何一项，此区域中的场是感应场和辐射场的组合，因此无需专门讨论。事实上，对实际应用的天线，一般工作于远区。

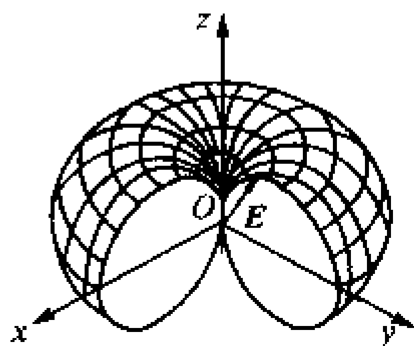
2) 电流元的辐射方向图

任何实用天线的辐射都具有方向性，通常将天线远区辐射场的振幅与方向间的关系用曲线表示出来，这种曲线图被称为天线的辐射方向图，而将离开天线一定距离 R 处的天线远区的辐射场量与角度坐标间的关系式(的绝对值)称为天线的方向图函数，记为 $|F(\theta,\varphi)|$。

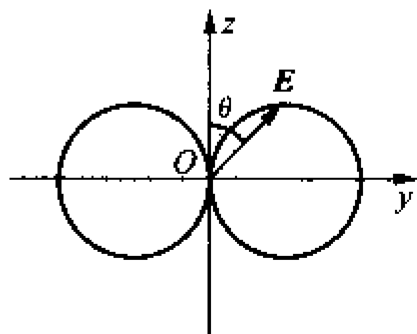
从前面讨论可知，电流元的远区辐射场量在相同距离 R 的球面上不同方向的各点，场强是不同的，它与 $\sin\theta$ 成正比，因此电流元的方向图函数为

$$|F(\theta,\varphi)|=|F(\theta)|=\sin\theta$$

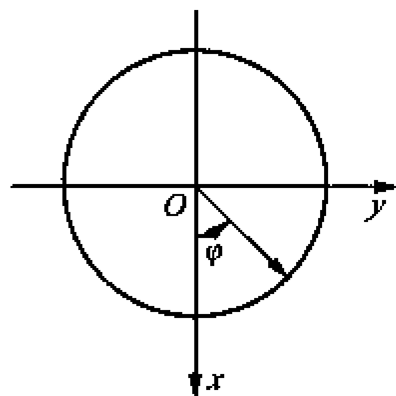
为了作出电流元的辐射方向图，将电流元中心置于坐标原点，向各个方向作射线，并取其长度与场强的大小成正比，即得到一个立体图形，也就是电流元的立体方向图，它的形状像汽车轮胎。如图 6.2(a)所示。



(a) 立体方向图



(b) E 面方向图



(c) H 面方向图

图 6.2　电流元的方向图

天线的立体方向图一般较难画出，通常只作出相互垂直的两个平面内的方向图，即 E 面和 H 面方向图。电流元的 E 面方向图处于子午面，即电场分量 E_θ 所处的平面内的方向图，故称为 E 面方向图；H 面方向图处于赤道面内，即与磁场分量 H_φ 平行的平面内的方向图，故称为 H 面方向图。二维平面方向图可以在极坐标系中绘制，也可以在直角坐标系中绘制，但在极坐标系中绘制的方向图较为直观，因此较为常用。在极坐标系中绘制的电流元

的 E 面和 H 面方向图如图 6.2(b)和 6.2(c) 所示。显然，E 面方向图关于电流元的轴线呈轴对称分布，在 $\theta = 90°$ 方向出现最大值“1”，其他方向上的矢径按 $\sin\theta$ 作出，而在轴线 ($\theta = 0°$ 和 $\theta = 180°$) 上值为零。在 H 面 ($\theta = 90°$) 上，各方向上场强均相同，故其方向图是一个单位圆。这样，将 E 面方向图绕电流元的轴线旋转一周即可得到电流元的立体方向图。

3) 电流元的辐射功率和辐射电阻

天线辐射的平均功率可以由平均功率密度 $\boldsymbol{S}_{av}$ 在包围天线的球面上的而积分得到，即

$$P_r = \oint_S \boldsymbol{S}_{av} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.22}$$

对电流元，其平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{av} = \text{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right] = \boldsymbol{a}_R \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} = \boldsymbol{a}_R \frac{\eta_0}{2}\left(\frac{Il}{2\lambda R}\sin\theta\right)^2$$

故辐射功率为

$$P_r = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\eta_0}{2}\left(\frac{Il}{2\lambda R}\sin\theta\right)^2 R^2 \sin\theta d\theta = 40\pi^2\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \tag{6.23}$$

按照电路理论，可以假设天线辐射的总功率被一个等效电阻 R_r 吸收，即当等效电阻 R_r 上的电流等于天线上的最大电流时，其损耗功率就等于天线的辐射功率，这个等效电阻就称为辐射电阻。于是，有

$$P_r = \frac{1}{2} I_m^2 R_r \tag{6.24}$$

式中，I_m 为天线激励电流的最大值，对电流元，将式(6.23)代入，并令 $I_m = I$，即得

$$R_r = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{6.25}$$

天线辐射电阻的大小反映了其辐射能力，一般总希望天线的辐射电阻越大越好。但对电流元，因 $l \ll \lambda$，如取 $l = \lambda/100$，可算得 $R_r \approx 0.079\ \Omega$，故其辐射能力很差。

6.2.2 磁流元

磁流元又称为基本磁振子或磁偶极子，它是指一个长度远小于波长 ($l \ll \lambda$)，其上有均匀磁流 I_M 分布的线性振子。我们知道自然界中不存在磁荷，当然也不存在磁流，这些都为实验所证实。但利用虚拟的磁荷和磁流来分析一些电磁场问题特别是某些天线的辐射问题会使计算大为简化。实际上，对于周长远小于波长的小电流环和一个无限大又无限薄的理想导体板上开一长度远小于波长的窄缝都近似具有磁流元的特性，所以分析磁流元也具有实际意义。

1) 磁流元的辐射场

根据电磁对偶性原理，由电流元远区辐射场的表达式可直接写出磁流元远区场辐射场的表达式

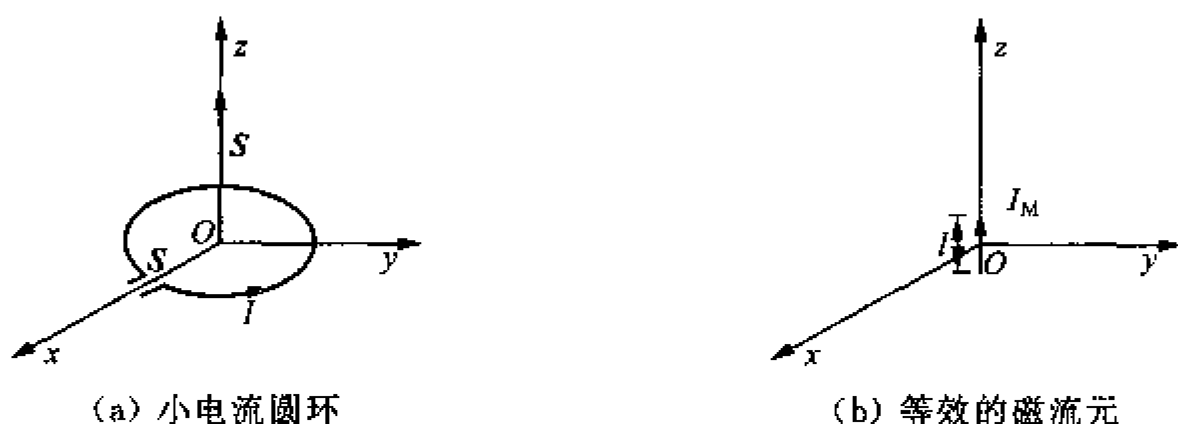
$$\left.\begin{aligned} H_\theta &= j\frac{I_M l}{2\eta_0\lambda R}\sin\theta e^{-jkR} \\ E_\varphi &= -j\frac{I_M l}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR} = -\eta_0 H_\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

可见,磁流元也辐射球面波,且基本特性与电流元相同,只是辐射场的分量是 E_φ 和 H_θ,而不是 E_θ 和 H_φ,因此最大辐射方向上电场的极化方向与电流元的正好叉开 90°。

2) 小电流环的辐射

对如图 6.3 (a)所示的半径和周长远小于波长的小电流圆环(也可以是方环),可等效为如图 6.3(b)所示的磁流元。为导出小电流圆环的远区辐射场,设小圆环处于 xOy 平面内,环的中心与坐标原点重合,并设小环的面积为 S,则小环的磁偶极矩 $\boldsymbol{p}_M$ 与电流 I 间的关系为 $\boldsymbol{p}_M=\mu_0 I\boldsymbol{S}$。另外,同电流元的情况相比较,小电流圆环可视为等值异号的磁荷 $+q_M$ 和 $-q_M$ 构成的磁偶极子,其磁偶极矩的大小为 $p_M=q_M l$。令小电流圆环的磁矩等于磁流元的磁偶极矩,则有

$$q_M l=\mu_0 IS \tag{6.27}$$



(a) 小电流圆环 (b) 等效的磁流元

图 6.3 小电流圆环及其等效的磁流元

因为磁流元的磁流 I_M 与磁荷 q_M 间的关系为 $I_M=\dfrac{dq_M}{dt}$,而复数形式为 $I_M=j\omega q_M$,故式(6.27)变为

$$I_M l=j\omega\mu_0 IS \tag{6.28}$$

这就是磁流元的 $I_M l$ 和小电流环的 IS 间的关系。这样,将上式代入式(6.26),即得到小电流环在远区的辐射场表达式

$$\left.\begin{aligned} H_\theta &= -\frac{\omega\mu_0 SI}{2\eta_0\lambda R}\sin\theta e^{-jkR} \\ E_\varphi &= \frac{\omega\mu_0 SI}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR} \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

式中,$(2\pi S/\lambda)$相当于电流元的长度 l,故称它为小电流环的有效长度,记为 l_e。

小电流环的辐射方向图与电流元的辐射方向图形式完全相同,但两者的 E 面和 H 面的方向图应互换。同时利用引出的小电流环的有效长度,可直接根据电流元的辐射电阻公式(6.25)导出小电流环的辐射电阻,即

$$R_r = 80\pi^2\left(\frac{l_e}{\lambda}\right)^2 = \frac{320\pi^4 S^2}{\lambda^4} \tag{6.30}$$

由此可见，小电流环的辐射电阻反比于 λ^4，而电流元的辐射电阻则反比于 λ^2，因此，当环的尺寸不变而波长增加时，辐射电阻将急速下降，所以其辐射能力比电流元还要弱。

6.3　天线的基本参数

一副天线性能的优劣直接影响无线电设备的质量，所以设计天线时必须精确地考虑和评价其技术性能。为了定量衡量一副天线的性能，通常用一些特性参数作为天线的技术指标。天线的主要特性参数为主瓣宽度、副瓣电平、前后比、方向性系数、效率、增益、等效高度、以及极化、输入阻抗等。下面仅介绍较常用的特性参数。

6.3.1　天线的方向图及其有关参数

我们知道，任何实用天线的远区辐射场都是随空间的位置变化而变化的，因此在球坐标系中天线至场点距离 R 处的远区辐射场量只是角度 θ, φ 的函数，这个函数就是方向图函数 $|F(\theta, \varphi)|$，通常将方向图函数 $|F(\theta, \varphi)|$ 关于其最大值 $|F_{max}(\theta, \varphi)|$ 进行归一化的函数 $|F(\theta, \varphi)|/|F_{max}(\theta, \varphi)|$ 称为归一化方向图函数，记为 $|f(\theta, \varphi)|$。按归一化方向图函数绘制的方向图称为天线的归一化方向图。显然，图 6.2 中示出的电流元的 E 面和 H 面方向图也是归一化的方向图（因为其最大辐射方向上的最大值为 1）。

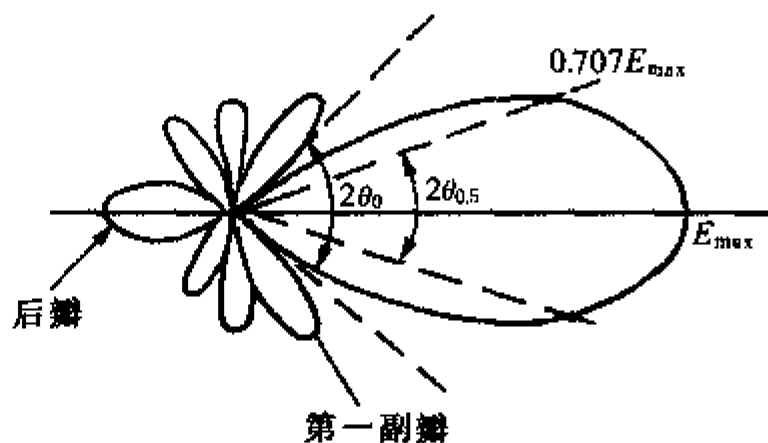


图 6.4　天线方向图的波瓣

天线的方向图虽能描述空间不同方向上辐射能量的大小，但具体量的概念不够明确，因此也采用另外一些特性参数来描述天线方向性的性能。

1）*主瓣宽度*

当天线的 E 面或 H 面方向图具有如图 6.4 所示的多瓣形状时，通常将天线最大辐射方向所在的波瓣称为主瓣，其余的波瓣称为副瓣（或旁瓣）及后瓣（或尾瓣）。在主瓣两侧分别取辐射功率（场强）等于最大值方向的辐射功率的 1/2（场强的 $1/\sqrt{2}$）处的两点，这两点间的夹角称为主瓣的半功率点张角，记为 $(2\theta_{0.5})_{E,H}$ 或 $(2\theta_{-3dB})_{E,H}$，或称半功率波束宽度（或更简单地称为主瓣宽度）。从极坐标的坐标原点向主瓣的两侧引射线，这两根射线间的夹角称为主瓣零点宽度，记为 $2\theta_0$。

2）*副瓣电平*

实际天线的方向图往往不止一个副瓣，而是有若干个副瓣。紧靠主瓣的副瓣称为第一副瓣，依次称为第二，三，…副瓣。为估计天线副瓣的强弱，通常用副瓣电平来表示，定义为任一副瓣的最大值与主瓣最大值之比，并以 dB 作单位。由于最靠近主瓣的的第一副瓣其

电平最高,因此通常对天线的第一副瓣电平提出要求。天线副瓣的辐射,无论对通信还是雷达来说都是有害的,它直接影响天线性能的优劣程度。

3) 前后比

天线的前后比是指天线最大辐射方向(前向)电平与其相反方向(反向)电平之比,通常也用 dB 作单位。天线的前后比反映了天线的前、后向隔离程度或抗干扰能力。天线的前后比应尽可能高些。

4) 方向性系数

由于上述与方向图有关的参数只能表示同一天线在空间各个不同方向辐射能量的相对大小,但却不能反映天线在全空间中辐射能量的集中程度。为了定量衡量天线的方向性,下面引入天线方向性系数这一重要参数。

天线的方向性系数定义为:天线在远区最大辐射方向上某点的平均辐射功率密度$(S_{max})_{av}$与平均辐射功率相同的无方向性天线(各向同性天线)在同一点的平均辐射功率密度$(S_0)_{av}$之比,记为 D。即

$$D = \left.\frac{(S_{max})_{av}}{(S_0)_{av}}\right|_{P_r相同,R相同} = \left.\frac{|E_{max}|^2}{|E_0|^2}\right|_{P_r相同,R相同} \tag{6.31}$$

式中,$(S_{max})_{av} = |E_{max}|^2/2\eta_0$;$(S_0)_{av} = |E_0|^2/2\eta_0$,而 $\eta_0 = 120\pi\ \Omega$。

对无方向性天线,因 $(S_0)_{av} = P_r/4\pi R^2$,故式(6.31)可变为

$$D = \frac{|E_{max}|^2 R^2}{60P_r} \tag{6.32}$$

所以

$$|E_{max}| = \frac{\sqrt{60P_r D}}{R} \tag{6.33}$$

由此可见,在平均辐射功率相同的情况下,有方向性天线在最大辐射方向上的场强是无方向性天线辐射场强的$\sqrt{D}$倍,即最大辐射方向上的平均辐射功率增大到 D 倍。这表明天线在其他方向辐射的部分功率加强到其最大辐射方向上,且主瓣越窄,加强到最大辐射方向上的功率就越多,则方向性系数越大。

若已知天线的归一化方向图函数为$|f(\theta,\varphi)|$,则天线在空间任意方向上远区的电场强度的模及平均辐射功率密度分别为

$$|E(\theta,\varphi)| = |E_{max}||f(\theta,\varphi)| \tag{6.34}$$

$$S_{av}(\theta,\varphi) = \frac{|E(\theta,\varphi)|^2}{2\eta_0} = \frac{|E_{max}|^2|f(\theta,\varphi)|^2}{240\pi} \tag{6.35}$$

于是,天线的平均辐射功率为

$$P_r = \oint_S S_{av}(\theta,\varphi)\mathrm{d}S = \frac{|E_{max}|^2R^2}{240\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}|f(\theta,\varphi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{6.36}$$

将上式代入式(6.32),即得方向性系数的计算式

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi} \tag{6.37}$$

若 $|f(\theta, \varphi)| = |f(\theta)|$，即方向图与 φ 无关，则

$$D = \frac{2}{\int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta} \tag{6.38}$$

例 6.1 求沿 z 轴放置的电流元的 E 面主瓣宽度和方向性系数。

解：因沿 z 轴放置的电流元的归一化 E 面方向图函数为

$$|f(\theta)| = \sin\theta$$

于是，由 $\sin\theta_{0.5E} = 1/\sqrt{2}$，得电流元的 E 面主瓣宽度为

$$2\theta_{0.5E} = 90^\circ$$

将沿 z 轴放置的电流元的方向图函数代入式(6.38)，得

$$D = \frac{2}{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta} = \frac{2}{\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta} = \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{2} = 1.5$$

若用分贝表示，则

$$D = 10\lg 1.5 = 1.76 \text{ dB}$$

6.3.2 效率

由于实际天线中导体和介质都要引入一定的欧姆损耗，因此天线的平均辐射功率 P_r 一般都小于天线的平均输入功率 P_{in}。天线效率定义为：天线的平均辐射功率 P_r 与平均输入功率 P_{in} 之比，记为 η_A，即

$$\eta_A = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_d} \tag{6.39}$$

式中，P_d 为天线的平均损耗功率，它同损耗电阻 R_d 间的关系为

$$P_d = \frac{1}{2} I_m^2 R_d \tag{6.40}$$

而 I_m 为天线输入电流的最大值。于是，式(6.39)可表示为

$$\eta_A = \frac{R_r}{R_d + R_r} \tag{6.41}$$

可见，要提高天线的效率，应尽可能提高天线的辐射电阻，尽可能降低天线的损耗电阻。当频率较低时，由于天线的长度和波长相比很小，辐射电阻很小，而一般天线的尺寸较大使损耗较大，因此 η_A 较低。在微波波段，特别是频率高端，由于天线几何尺寸与波长可相比拟或更大，辐射电阻大大提高，面损耗不高，与辐射电阻相比可忽略不计，因此天线效率可认为接

近于1,即 $\eta_A \approx 1$。

6.3.3 增益系数

为了全面衡量天线能量转换和方向性的性能,通常将方向性系数和天线效率两者联系起来,引入一个新的特性参数——增益系数。

天线的增益系数定义为:天线在远区最大辐射方向上某点的平均功率密度与平均输入功率相同的无方向性天线在同一点的平均功率密度之比,记为 G,即

$$G = \left.\frac{(S_{\max})_{av}}{(S_0)_{av}}\right|_{P_{in}\text{相同},R\text{相同}} \tag{6.42}$$

式中,$(S_0)_{av} = P_r/4\pi R^2$。于是,式(6.42)变为

$$G = \frac{(S_{\max})_{av}}{P_{in}/4\pi R^2} = \frac{(S_{\max})_{av}}{P_r/4\pi R^2}\frac{P_r}{P_{in}} = D\eta_A \tag{6.43}$$

可见,天线的增益系数等于天线的方向性系数与辐射效率的乘积。在微波波段,由于天线的辐射效率很高,故天线的增益与方向性系数相差不大。实际应用中,天线的增益用得较多,且用 dB 表示增益系数,即

$$G(\mathrm{dB}) = 10\lg G \ \mathrm{dB} \tag{6.44}$$

天线的增益一般越高越好。

6.3.4 等效高度

天线的等效高度(或有效长度)定义为:在保持实际天线最大辐射方向上场强值不变的条件下,假设天线上电流为均匀分布时天线的等效高度。它是将天线在最大辐射方向上的场强与天线上的电流联系起来的一个参数。通常将等效高度归于输入电流的记为 h_{ein},归于波腹电流的记为 h_{em}。天线的等效高度越高,表明天线的辐射能力越强。

6.4 对称振子天线

前面所述的电流元和磁流元因其辐射电阻低,不能作为实际天线使用。下面将介绍中心馈电,长度与波长相比拟的对称振子天线(简称对称振子)。对称振子是最基本也是最常见的一种实用型天线。

6.4.1 对称振子的电流分布与远区辐射场

对称振子是由两根粗细和长度都相同的导线构成,中间为两个馈电端,如图 6.5 所示。当在对称振子的中间馈电点接上高频电动势时,在对称振子的两臂上将产生高频电流,该电流将产生辐射场。由于对称振于的长度可与波长相比拟,其上电流的幅度和相位不能视为

处处相同，因此对称振子的辐射场不同于电流元的辐射场。但可以将对称振子分成无数小段，每一小段都可看成是电流元，则整个对称振子的辐射场就等于电流元的辐射场沿整个导线长度的积分。所以，为了求得对称振子的辐射场，首先应确定对称振子上的电流分布。

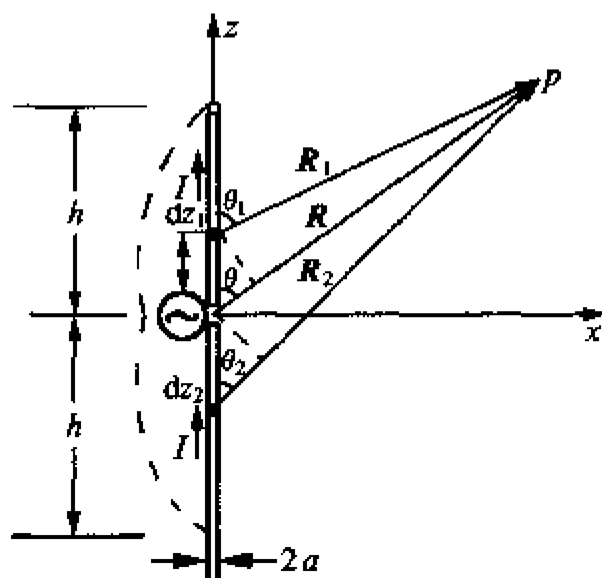
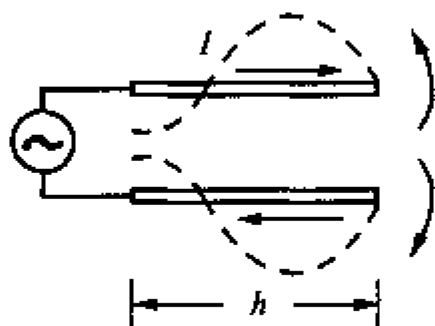
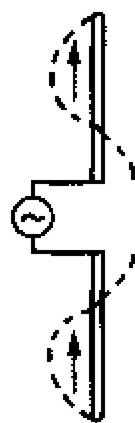


图 6.5　对称振子

对称振子上的电流分布可近似采用传输线理论（本书下册第 2 章讨论）进行分析，即将对称振子看成是一段长为 h，终端开路的传输线分别向上向下展开 180°成为一直线而成，如图 6.6 所示，对称振子上的电流分布与终端开路传输线上的一致。选取对称振子的轴线与 z 轴重合，对 $a \ll \lambda$ 的振子，若略去因辐射引起的电流分布的改变，则电流近似于正弦分布，即



(a) 开路传输线上的电流分布



(b) 对称振子上的电流分布

图 6.6　开路传输线演变成对称振子

$$I(z) = I_m \sin[k(h - |z|)] \tag{6.45}$$

式中，I_m 为电流驻波的波腹点处的电流。

对称振子上臂 z 处的电流元 $I_{z_1} dz_1 = I(z) dz$ 在远区场点 p 产生的辐射电场为

$$d\boldsymbol{E}_1 = (dE_{\theta_1})\boldsymbol{a}_{\theta_1} = \boldsymbol{a}_{\theta_1} j \frac{\eta_0 I(z) dz}{2\lambda R_1} \sin\theta_1 e^{-jkR_1} \tag{6.46}$$

振子下臂关于中点对称的 $-|z|$ 处电流元 $I_{z_2} dz_2 = I(z) dz$ 在 p 处产生的辐射场为

$$d\boldsymbol{E}_2 = (dE_{\theta_2})\boldsymbol{a}_{\theta_2} = \boldsymbol{a}_{\theta_2} j \frac{\eta_0 I(z) dz}{2\lambda R_2} \sin\theta_2 e^{-jkR_2} \tag{6.47}$$

对远区场点，各源点至场点的射线可视为平行，即 $\boldsymbol{R}_1 /\!/ \boldsymbol{R} /\!/ \boldsymbol{R}_2$，从而有 $\theta_1 = \theta = \theta_2$，$\boldsymbol{a}_{\theta_1} \approx \boldsymbol{a}_\theta \approx \boldsymbol{a}_{\theta_2}$，$1/R_1 \approx 1/R \approx 1/R_2$。在相位因子中应有 $R_1 \approx R - |z|\cos\theta$，$R_2 \approx R + |z|\cos\theta$，这是因为 $|z|\cos\theta$ 与 R 相比很小，但与波长 λ 可相比拟，可能会引起较大的相位差。于是，电场 dE_1 和 dE_2 方向的单位矢量均为 $\boldsymbol{a}_\theta$，其矢量和变成代数和。故有

$$dE_\theta = dE_{\theta_1} + dE_{\theta_2} = j \frac{\eta_0 I(z) dz}{2\lambda R} \sin\theta e^{-jkR} (e^{jk|z|\cos\theta} + e^{-jk|z|\cos\theta})$$

$$= j\frac{\eta_0 I_m \sin[k(h-|z|)]dz}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR}2\cos(k|z|\cos\theta)$$

总辐射电场为

$$E_\theta = \int_0^h dE_\theta = j\frac{60I_m}{R}e^{-jkR}\frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos(kh)}{\sin\theta} \tag{6.48a}$$

而辐射磁场为

$$H_\varphi = \frac{E_\theta}{\eta_0} \tag{6.48b}$$

由此可见，与电流元相似，对称振子的远区辐射场也只有 E_θ 和 H_φ 两个分量，故辐射的远区场是沿矢量 $\boldsymbol{a}_R$ 方向传播的 TEM 波，且电场分量与磁场分量同相；辐射的电磁波也是球面波，辐射中心就是对称振子的中心；辐射场与 R 成反比，与 I_m 成正比，并与 θ 有关，即辐射场具有方向性。

对称振子常见的臂长是 $h=\lambda/4$，即 $2h=\lambda/2$，这种对称振子称为半波对称振子。半波对称振子的远区辐射电场为

$$E_\theta = j\frac{60I_m}{R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{-jkR} \tag{6.49}$$

6.4.2 对称振子的方向图与辐射电阻

式(6.48a)中，电场分量 E_θ 与坐标角 θ 间的关系即对应对称振子的方向图函数，即

$$|F(\theta,\phi)| = |F(\theta)| = \frac{|\cos(kh\cos\theta)-\cos(kh)|}{|\sin\theta|} \tag{6.50}$$

而归一化的方向图函数为

$$|f(\theta)| = \frac{|F(\theta)|}{|F_{max}(\theta)|}$$

对一般实用的对称振子，最大辐射方向在 $\theta=\pi/2$ 处，此时

$$|F_{max}(\theta)| = |1-\cos(kh)|$$

因此

$$|f(\theta)| = \left|\frac{1}{1-\cos(kh)}\frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos(kh)}{\sin\theta}\right| \tag{6.51}$$

特别地，对半波对称振子，有

$$|F(\theta)| = |f(\theta)| = \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right| \tag{6.52}$$

从对称振子的归一化方向图函数可知，它只含有 θ，不含有 φ，这说明对称振子的辐射场与 φ 无关，也就是在垂直于对称振子的 H 面内无方向性，即对称振子的 H 面方向图仍然是

单位圆。这与电流元的情况相同。同时，对称振子的 E 面方向图除了随角度 θ 变化外，还与对称振子的电长度 $2h/\lambda$ 有关。图 6.7 示出了不同 $2h/\lambda$ 值时对称振子的 E 面方向图的变化情况。由图可见，当 $2h/\lambda \leqslant 1$ 时，方向图只有两个主波瓣，没有副瓣。在垂直于振子轴线上有最大辐射，且振子的臂长越长，方向图越尖锐，即方向性越强；当 $2h/\lambda > 1$ 时，方向图出现副瓣，随着振于臂长的增加，中央波瓣将逐渐变小，副瓣将逐渐变大；当 $2h/\lambda = 2$ 时，中央波瓣消失，面出现四个波瓣。可以证明，半波对称振子和全波对称振子的 E 面主瓣宽度分别为 78°和 47.8°。

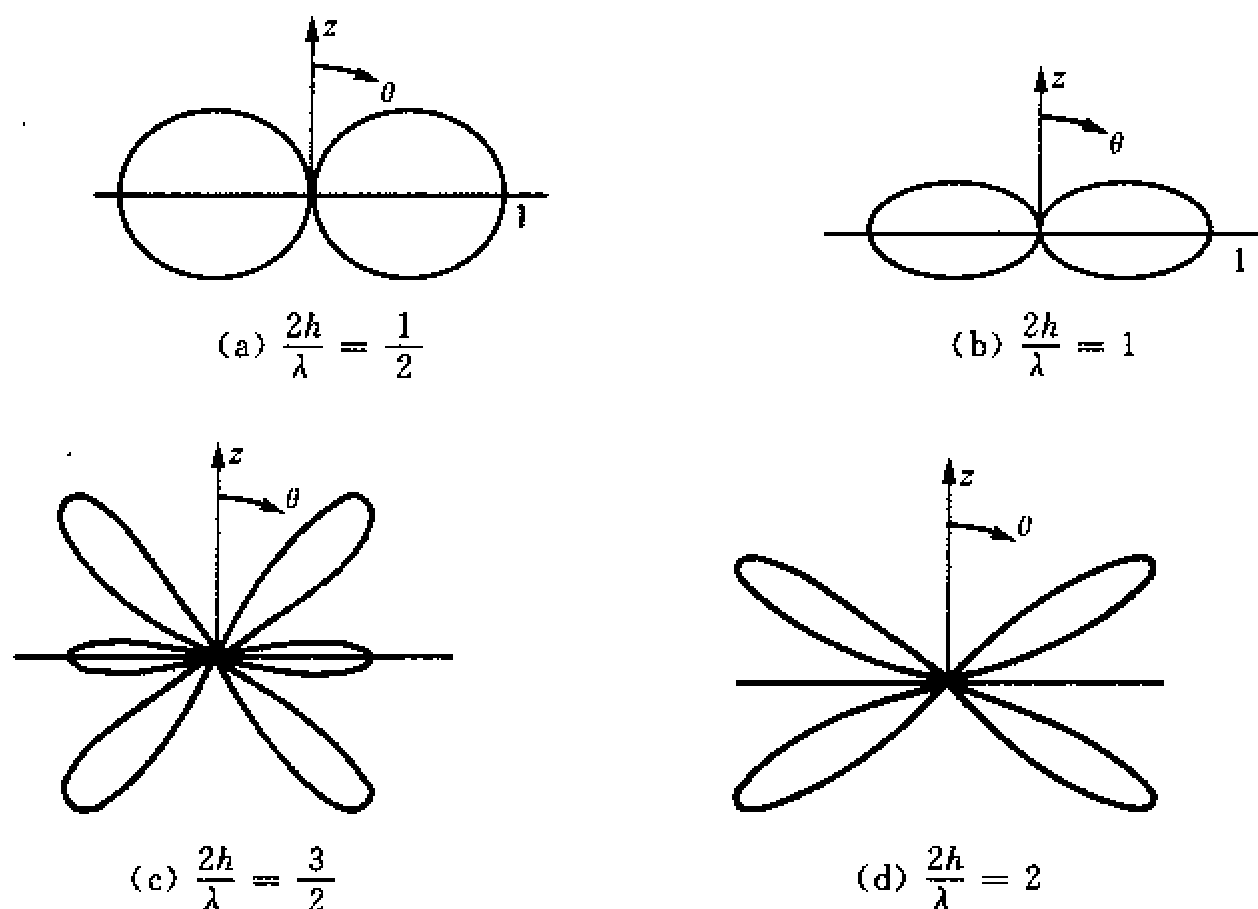


图 6.7 不同电长度的对称振子的归一化 E 面方向图

对称振子的辐射功率为

$$P_r = \oint_S \boldsymbol{S}_{av} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= 30 I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kh\cos\theta) - \cos(kh)]^2}{\sin\theta} d\theta \tag{6.53}$$

因此辐射电阻为

$$R_r = \frac{P_r}{I_m^2/2}$$

$$= 60\int_0^{\pi} \frac{[\cos(kh\cos\theta) - \cos(kh)]^2}{\sin\theta} d\theta \tag{6.54}$$

此积分可利用正弦积分和余弦积分表计算，也可利用数值积分法计算。图 6.8 示出了对称振子的辐射电阻随其单臂的电长

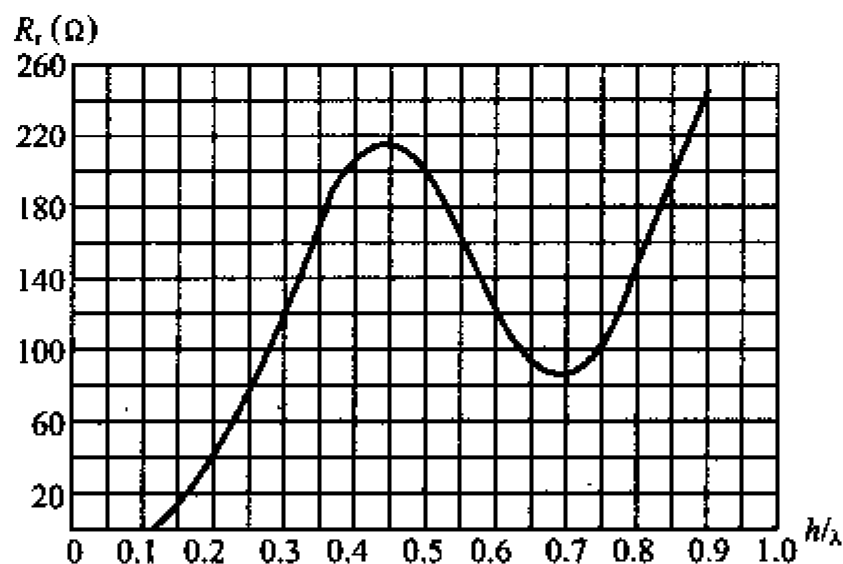


图 6.8 对称振子的辐射电阻随 h/λ 的变化曲线

度 h/λ 的变化曲线。可以证明：对半波对称振子，$R_r = 73.1\ \Omega$；对全波对称振子，$R_r = 200\ \Omega$；对 $h/\lambda \leqslant 0.1$ 的对称振子，$R_r \approx 20(kh)^4\ \Omega$。

例 6.2 求半波对称振子的辐射电阻和方向性系数。

解：① 由式(6.53)可得半波对称振子的辐射功率为

$$P_r = 30I_m^2\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta = 15I_m^2\int_0^\pi \frac{1+\cos(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}d\theta \tag{6.55}$$

令 $u = \pi + \pi\cos\theta$，则式(1)中的积分变为

$$\int_0^\pi \frac{1+\cos(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}d\theta = \pi\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{u(2\pi-u)}du = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{u}du \tag{6.56}$$

将上式代入式(6.55)，并利用余弦积分表，可得

$$P_r = 15I_m^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{u}du = 15I_m^2[\ln(2\pi)+\gamma-C_i(2\pi)] \tag{6.57}$$

式中，$\gamma = 0.577\,2$，为欧拉常数；$C_i(2\pi) = -0.022\,6$，为余弦积分值。于是，辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 73.1\ \Omega \tag{6.58}$$

② 可利用式(6.32)直接由定义式求半波对称振子的方向性系数。由式(6.49)，并令 $\theta = \pi/2$，得

$$|E_{max}| = \frac{60I_m}{R}|F_{max}(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{60I_m}{R} \tag{6.59}$$

而

$$P_r = \frac{1}{2}I_m^2R_r \tag{6.60}$$

将以上两式及式(6.58)代入式(6.32)，即得

$$D = \frac{|E_{max}|^2R^2}{60P_r} = \frac{120}{73.1} = 1.64 \tag{6.61}$$

若用分贝表示，则

$$D(\text{dB}) = 10\lg 1.64 = 2.15\ \text{dB} \tag{6.62}$$

6.5 天线阵

从前面的讨论可知，对称振子类天线的主瓣宽度较宽，即方向性较弱，因此一般难以单独用作实用的天线。为了提高天线的方向性，通常将若干个单元天线(或称为阵元)按某种方式排列成天线阵。只要天线阵的各个阵元上电流的振幅和相位满足适当的关系，即可获得所需的辐射特性。根据不同的排阵方法，天线阵可分为直线阵、平面阵和立体阵。直线阵特别是均匀直线阵是最常见的天线阵形式，而直线阵中最简单的是二元阵。下面先介绍二

元阵，然后再讨论多元阵的情况。

6.5.1 二元阵

设有两个形式和取向均相同的天线单元(称为相似元)沿直角坐标系的某一坐标轴排列，如图 6.9 所示。两阵元的间距为 d，两阵元上的电流分别为 I_1 和 I_2，且 $I_2 = mI_1 e^{j\xi}$，其中 m 为两阵元电流振幅的比值，且 ξ 为 I_2 超前于 I_1 的电流相位。假设观察点 p 位于远区，从阵元"1"和阵元"2"至 p 点的射线可近似认为平行，因此两阵元在点 p 处辐射电场的方向都沿 $\boldsymbol{a}_\theta$ 方向，即 $\boldsymbol{E}_1$ 平行于 $\boldsymbol{E}_2$。于是，二元阵在点 p 处的辐射电场可表示为

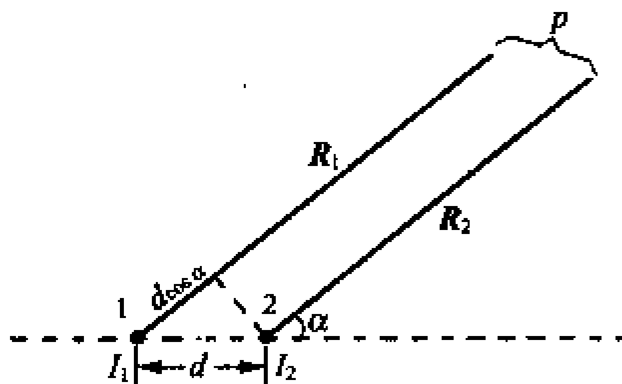


图 6.9 二元阵

$$E_\theta = E_{\theta 1} + E_{\theta 2} = E_{m1} F_1(\theta, \varphi) \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + E_{m2} F_2(\theta, \varphi) \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \tag{6.63}$$

因两个单元天线为相似元，故 $F_2(\theta, \varphi) = F_1(\theta, \varphi)$，对应于各单元天线本身的方向图函数，$E_{m2} = mE_{m1} e^{j\xi} = mE_m e^{j\xi}$，$1/R_1 \approx 1/R_2$，以及在相位因子中，则有 $R_2 \approx R_1 - d\cos\alpha$，于是，二元阵的辐射电场变成

$$E_\theta = E_m F_1(\theta, \varphi)(1 + me^{j\psi}) \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \tag{6.64}$$

式中，$\psi = \xi + kd\cos\alpha$。所以，二元阵辐射电场的模值为

$$|E_\theta| = \frac{|E_m|}{R_1} |F_1(\theta, \varphi)| |(1 + me^{j\psi})| = \frac{|E_m|}{R_1} |F(\theta, \varphi)| \tag{6.65}$$

由此可见，合成辐射场的方向图函数 $|F(\theta, \varphi)|$ 由两个因子的乘积决定。其中第一个因子 $|F_1(\theta, \varphi)|$ 为单元天线本身的方向图函数，称为天线阵的方向图函数的元因子；第二个因子 $|(1+me^{j\psi})|$ 与阵元间的距离、阵元上的电流的振幅比及相位差 ξ 有关，称为天线阵方向图函数的阵因子，记为 $|F_a(\theta, \varphi)|$。因此，天线阵的方向图函数为

$$|F(\theta, \varphi)| = |F_1(\theta, \varphi)| |F_a(\theta, \varphi)| \tag{6.66a}$$

而归一化方向图函数为

$$|f(\theta, \varphi)| = \frac{|F(\theta, \varphi)|}{|F_{\max}(\theta, \varphi)|}$$

一般地，$|F_1(\theta, \varphi)|$ 与 $|F_a(\theta, \varphi)|$ 在同一方向取得最大值，此时有

$$|f(\theta, \varphi)| = |f_1(\theta, \varphi)| |f_a(\theta, \varphi)| \tag{6.66b}$$

式中，$|f_1(\theta,\varphi)|=\dfrac{|F_1(\theta,\varphi)|}{|F_{1\max}(\theta,\varphi)|}$，$|f_a(\theta,\varphi)|=\dfrac{|F_a(\theta,\varphi)|}{|F_{a\max}(\theta,\varphi)|}$。

由式(6.63)可得到如下结论：在各单元天线为相似元的条件下，天线阵的(归一化)方向图函数等于(归一化)元因子与(归一化)阵因子的乘积。这就是方向图乘积原理。尽管方向图乘积原理由二元阵的分析得到，事实上，它对任意个相似元组成的天线阵都适用。

值得指出，在式(6.66)中方向图函数、元因子及阵因子均用球坐标系中的坐标角(θ,φ)表示，所得的表达式是方向图函数的一般式，便于实际应用。当单元天线为电流元或对称振子类的天线时，元因子$|F_1(\theta,\varphi)|=|F_1(\theta)|$中的角度$\theta$是从其轴线算起的，它并不一定是球面坐标系中的极角$\theta$。为了避免混淆，通常可将元因子中的角度$\theta$按振子轴线的取向不同加以改记，并将改记后的角度的表达式归算到球坐标系中。具体地，当坐标系中振子轴线沿x轴时，将原公式中的θ改记为θ_x，而

$$\cos\theta_x=\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_x$$

应用第1章中的式(1.78)，可得

$$\cos\theta_x=(\boldsymbol{a}_x\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_z\cos\theta)\cdot\boldsymbol{a}_x=\sin\theta\cos\varphi \tag{6.67a}$$

$$\sin\theta_x=\sqrt{1-\cos^2\theta_x}=\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi} \tag{6.67b}$$

同理，当振子轴线沿y，z轴时，则有

$$\cos\theta_y=\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_y=\sin\theta\sin\varphi \tag{6.68a}$$

$$\cos\theta_y=\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_z=\cos\theta \tag{6.68b}$$

这样，当振子轴线沿x，y，z轴时，在原单元天线的方向图函数中代入上述关系即得$|F_1(\theta,\varphi)|$。例如，当二元阵的阵元为半波对称振子且振子轴线沿x轴时，则有

$$|F_1(\theta,\varphi)|=|F_1(\theta_x)|=\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta_x\right)}{\sin\theta_x}\right|=\frac{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right|}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}}$$

对天线阵的阵因子$|F_a(\theta,\varphi)|$，同样需要将角度α归算到球坐标系中，即用球坐标系中的角度(θ,φ)表示阵因子。由于α表示从坐标原点向场点引出的射线与天线阵列中心连线所在坐标轴正向间的夹角，因此，当阵列中心连线沿x，y，z轴时，可将角度改记为α_x，α_y和α_z。通过类似分析，可得

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_x&=\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\alpha_y&=\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\alpha_z&=\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{6.69}$$

这样，当阵列中心连线沿某一坐标轴时，将阵因子中的α用式(6.69)中的相应表达式代入即得$|F_a(\theta,\varphi)|$。

对等幅同相激励的二元阵，阵因子为

$$|F_a(\theta,\varphi)|=|1+e^{j\psi}|=\sqrt{2(1+\cos\psi)}=2\left|\cos\frac{\psi}{2}\right| \tag{6.70a}$$

相应的归一化阵因子为

$$|f_a(\theta,\varphi)|=\left|\cos\frac{\psi}{2}\right|=\left|\cos\left[\frac{1}{2}(\xi+kd\cos\alpha)\right]\right| \tag{6.70b}$$

显然，对阵元间距 $d=\lambda/2$ 的等幅同相激励的二元阵，若阵列中心连线沿 x 轴，则

$$|F_a(\theta,\varphi)|=|F_a(\alpha_x)|=2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha_x\right)\right|=2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right|$$

对不等幅的二元阵，阵因子为

$$|F_a(\theta,\varphi)|=|1+me^{j\psi}|=\sqrt{1+m^2+2m\cos\psi} \tag{6.71a}$$

而归一化阵因子为

$$|f_a(\theta,\varphi)|=\frac{1}{1+m}\sqrt{1+m^2+2m\cos\psi} \tag{6.71b}$$

例 6.3　自由空间中，三个沿 y 轴排列，间距为 $\lambda/2$ 的电流元用于远区辐射电磁波，各电流元激励电流的相位相同，振幅比为 1∶2∶1，如图 6.10 所示。求该天线阵的归一化方向图函数，并画出 yOz 面的归一化方向图。

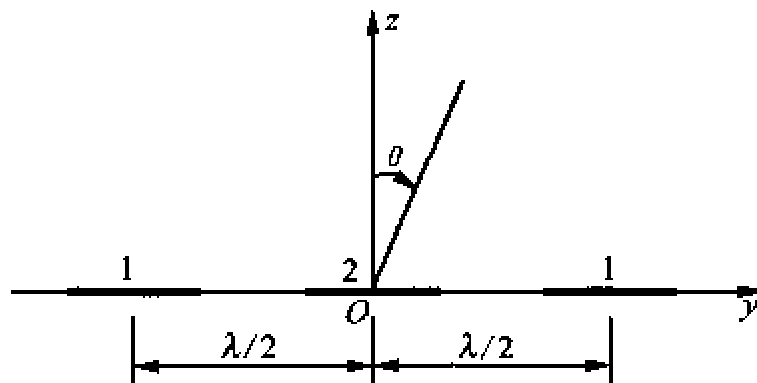


图 6.10　沿 y 轴排列的三元阵

解：方法 I

因该阵列天线工作于远区，故总的辐射电场为

$$\begin{aligned}E&=E_1+E_2+E_3=E_1(1+2e^{j\psi}+e^{j2\psi})\\&=\frac{E_{m1}}{R}e^{-jkR}\sin\theta_y(1+2e^{jkd\cos\alpha_y}+e^{j2kd\cos\alpha_y})\\&=\frac{E_{m1}}{R}e^{-jkR}F_1(\theta,\varphi)F_a(\theta,\varphi)\end{aligned}$$

于是，方向图函数为

$$\begin{aligned}|F(\theta,\varphi)|&=|F_1(\theta,\varphi)||F_a(\theta,\varphi)|\\&=|\sin\theta_y||1+2\cos(kd\cos\alpha_y)+\cos(2kd\cos\alpha_y)\\&\quad+j2\sin(kd\cos\alpha_y)+j\sin(2kd\cos\alpha_y)|\\&=\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}\left[4\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)\right|^2\right]\end{aligned}$$

所以，归一化方向图函数为

$$|f(\theta,\varphi)|=\frac{|F(\theta,\varphi)|}{|F(\theta,\varphi)|_{\max}}=\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)$$

方法 II

将三个电流元分成两组，每组均为一个等幅同相二元阵，而两个等幅同相二元阵又可组成一个新的等幅同相二元阵。因两个等幅同相二元阵的归一化元因子为

$$|f_1(\theta,\varphi)| = \sin\theta_y = \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}$$

而归一化阵因子均为

$$|f_{a1}(\theta,\varphi)| = \left|\cos\frac{1}{2}(kd\cos\alpha_y)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)\right|$$

因此，每个等幅同相二元阵的归一化方向图函数为

$$|f'(\theta,\varphi)| = |f_1(\theta,\varphi)||f_{a1}(\theta,\varphi)|$$

再将两个等幅同相二元阵组成一个新的等幅同相二元阵，其归一化元因子为$|f'(\theta,\varphi)|$，而归一化阵因子为

$$|f_{a2}(\theta,\varphi)| = |f_{a1}(\theta,\varphi)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)\right|$$

这样，总的三元阵的归一化方向图函数为

$$\begin{aligned}|f(\theta,\varphi)| &= |f'(\theta,\varphi)||f_{a2}(\theta,\varphi)| = |f_1(\theta,\varphi)||f_{a1}(\theta,\varphi)|^2 \\ &= \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)\end{aligned}$$

因在 yOz 平面上，$\varphi = 90°$，故有

$$|f(\theta,\varphi)| = |\cos\theta|\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$$

其归一化方向图如图 6.11 所示。

可以证明，通过天线阵的振子中心连线的任何平面内，天线阵的阵方向图函数的形式完全相同，即方向图相同。换言之，阵方向图是环绕天线阵中心连线的旋转对称图形，这一特点可用于检验阵方向图的正确性。

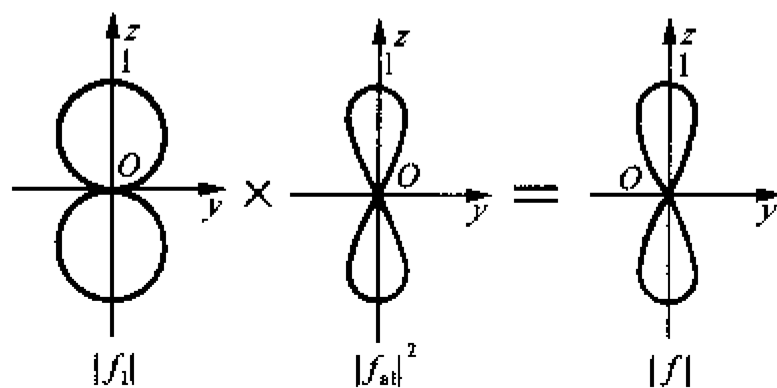


图 6.11 yOz 平面上的归一化方向图

6.5.2 导电体对天线的影响

前面有关单元天线和二元阵列天线的分析均是在假设天线处于自由空间中的前提下进行的，而实际天线均架设在地球表面或靠近接地的金属物体，因此地面或接地的金属物体必然会影响天线的辐射和阻抗特性。下面采用镜像法分析导电体对天线的影响。

我们可以采用静电场中引出的镜像法来分析放置于地球表面或接地的金属物体附近的天线，将地球表面或金属导体视为接地的理想导体。这样，实际天线的镜像位置上的镜像天线表面上的电荷必然和实际天线上的量值相等，符号相反。尽管实际天线上的电荷和电流是交变的，但我们总可以根据某一瞬间天线上高频电流（即电荷）的分布来判断镜像天线上电荷的量值与符号。

1）垂直、水平放置的电流元的镜像

电流元垂直放置于无限大接地理想导电平面上方，如图 6.12(a)所示。可将电流元看

成是带正负电荷的电偶极子。因这一电偶极子放置于接地理想导电平面的上方，为了用镜像电荷代替接地导电平面的影响，则在接地导电平面下方对称位置处应有电偶极子的镜像电偶极子，如图所示。若将镜像电偶极子上的电荷用从正到负的电流线表示，则可看出，镜像电荷的方向与原电流元的方向相同，即镜像为正像。这样，移去接地导电平面后，原电流元和镜像电流元构成一等幅同相二元阵。换言之，分析垂直放置于接地导电平面上方的电流元就等效于分析自由空间中的等幅同相二元阵。

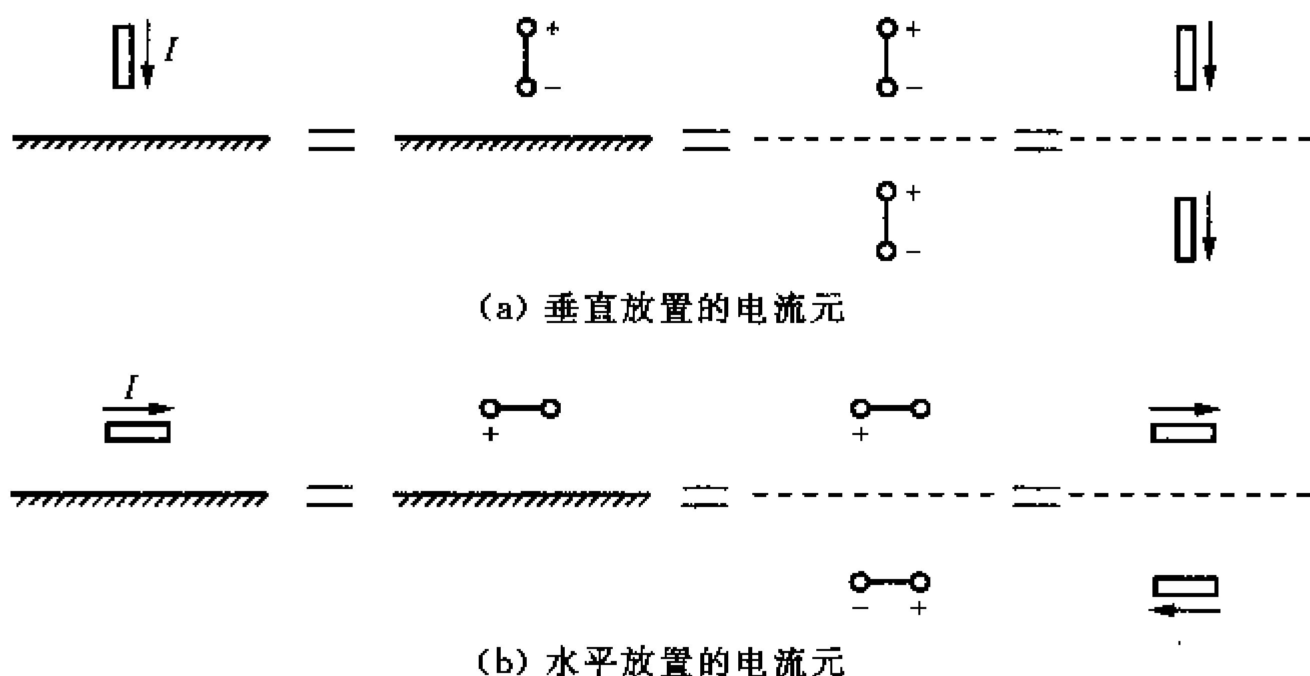


图 6.12 垂直、水平放置的电流元的镜像

根据同样的原理可知，水平放置于无限大理想接地导电平面上方的电流元的镜像为负像，即镜像电流元的相位与原电流元的相位差为 180°。因此原电流元与镜像电流元构成一等幅反相二元阵，如图 6.12(b)所示。

2) 倾斜放置的电流元的镜像

对如图 6.13 所示的倾斜放置的电流元，只要将倾斜放置的电流元关于接地导电平面分解成水平及垂直放置的电流元，然后根据水平及垂直放置的电流元的镜像容易得到其镜像电流元，如图所示。

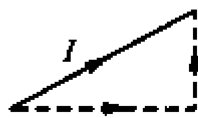




图 6.13 倾斜放置的电流元的镜像

3) 对称振子的镜像

通过类似的原理可知，水平架设于无限大理想接地导电平面上方的对称振子，不管长度如何，其镜像恒为负像；垂直架设于无限大理想接地导电平面上方的对称振子，不管长度如何，其镜像恒为正像，这同电流元的情况相同。

对于接地导电平面构成的角形域，置于角形域内天线的镜像也可用类似于静电场的镜像法中寻找多重镜像电荷的方法确定多重镜像天线，面角形域内天线的辐射场即为原天线与多重镜像天线的辐射场的叠加。

例 6.4 由两个半波对称振子组成的二元天线阵，如图 6.14(a)所示。其中间距为 $\lambda_0/2$，天线离无限大理想接地导电平面的距离为 $\lambda_0/4$，并等幅同相激励。①导出该天线阵归一化方向图函数；②写出该天线阵在 xOz，yOz 和 xOy 面内的归一化方向图函数，并绘出 xOz 面内的归一化方向图。

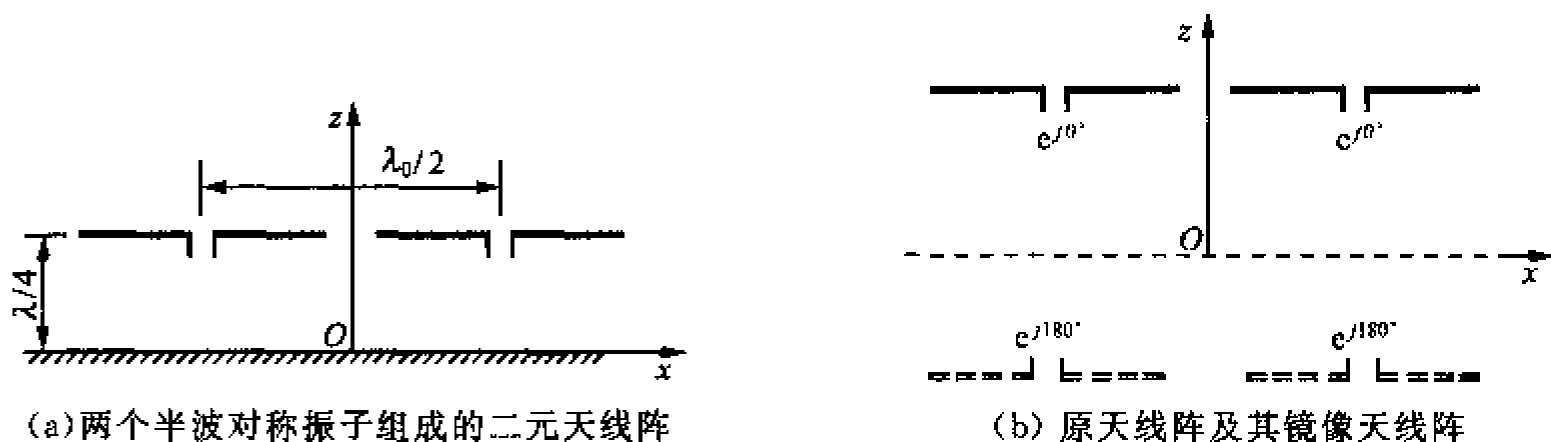


图 6.14 放置于接地导电平面上方的二元天线阵

解:① 采用镜像法求解。因水平天线的镜像是等幅反相的,故原二元阵同其镜像天线构成如图 6.14(b)所示的四元天线阵,此四元天线阵的归一化方向图函数可由天线的方向图乘积原理求得。导电平面上方原天线阵及其镜像天线阵各为一个等幅同相天线阵,其阵因子为

$$|F_{a1}(\theta,\varphi)| = 2\left|\cos\frac{\psi_1}{2}\right| = 2\left|\cos\left[\frac{1}{2}(\xi_1 + kd_1\cos\alpha_x)\right]\right|$$

$$= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha_x\right)\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right|$$

式中,$\psi_1 = \xi_1 + kd_1\cos\alpha_x$, $\xi_1 = 0$, $d_1 = \lambda_0/2$。原天线阵和镜像天线阵又构成一个等幅反相二元阵,其阵因子为

$$|F_{a2}(\theta,\varphi)| = 2\left|\cos\frac{\psi_2}{2}\right| = 2\left|\cos\left[\frac{1}{2}(\xi_2 + kd_2\cos\alpha_z)\right]\right|$$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$$

式中,$\psi_2 = \xi_2 + kd_2\cos\alpha_z$, $\xi_2 = 180°$, $d_2 = \lambda_0/2$。

因为半波对称振子的方向图函数(即四元天线阵的方向图函数的元因子)为

$$|F_1(\theta,\varphi)| = \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta_x\right)}{\sin\theta_x}\right| = \frac{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right|}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}}$$

所以,总的方向图函数为

$$|F(\theta,\varphi)| = |F_1(\theta,\varphi)|\,|F_{a1}(\theta,\varphi)|\,|F_{a2}(\theta,\varphi)|$$

以及总的归一化方向图函数为

$$|f(\theta,\varphi)| = \frac{|F(\theta,\varphi)|}{|F(\theta,\varphi)|_{\max}} = |f_1(\theta,\varphi)|\,|f_{a1}(\theta,\varphi)|\,|f_{a2}(\theta,\varphi)|$$

$$= \frac{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right|}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right|\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right| \quad (\theta \leqslant 90°)$$

② 在 xOz 面内，$\varphi = 0°$，所以

$$|f(\theta)| = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$$

在 yOz 面内，$\varphi = 90°$，所以

$$|f(\theta)| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$$

在 xOy 面内，$\theta = 90°$，所以

$$|f(\theta)| = 0$$

则 xOz 面内的归一化方向图如图 6.15 所示。

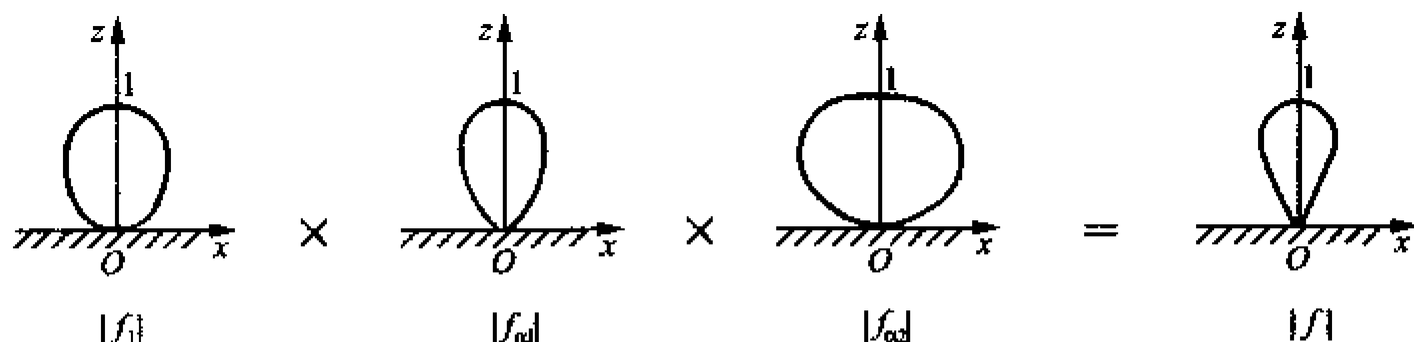


图 6.15 xOz 面内的归一化方向图

6.5.3 均匀直线阵

均匀直线阵是指天线阵有 N 个相似元，相似元的中心排列在一直线上，相邻阵元的间距相等，各阵元的电流振幅相等以及电流相位按等差级数递增或递减的直线阵，如图 6.16 所示。

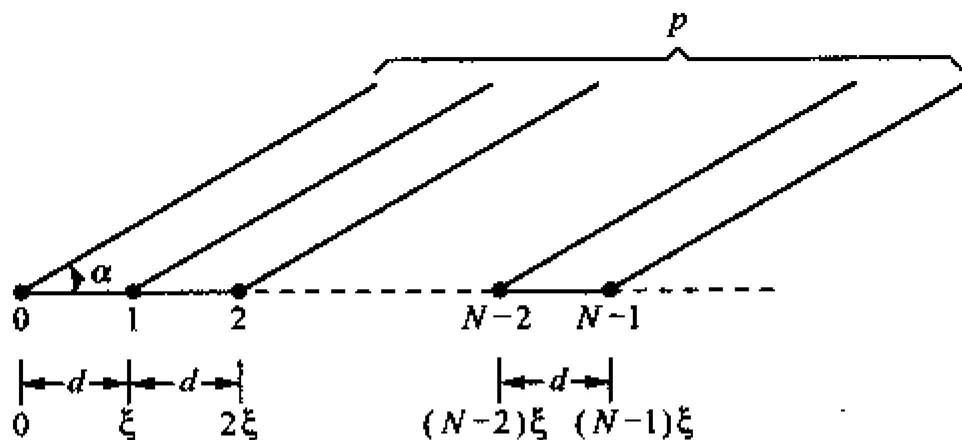


图 6.16 均匀直线阵

同二元阵一样，由于观察点 p 处于远区，各射线均可看作平行，故合成的辐射电场可用各单元天线辐射电场的代数和表示，即

$$E_\theta = E_{\theta 1} + E_{\theta 2} + \cdots + E_{\theta N} \tag{6.72}$$

设各单元天线上电流的相位递增，即

$$I_1 = I_m e^{j0^\circ},\ I_2 = I_m e^{j\xi},\ \cdots,\ I_N = I_m e^{j(N-1)\xi}$$

这样,均匀直线阵在远区 p 点辐射的电场变成

$$E_\theta = E_{\theta 1}[1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi}] \tag{6.73}$$

式中,$\psi = kd\cos\alpha + \xi$,$E_{\theta 1}$ 视单元天线是无方向性的点源、电流元还是对称振子等取不同的表达式,如单元天线是点源,则 $E_{\theta 1} = E_m e^{-jkR_1}/R_1$。于是,由式(6.73)知,均匀直线阵的阵因子为

$$|F_a(\psi)| = |1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi}| = \left|\frac{(e^{j\psi})^N - 1}{e^{j\psi} - 1}\right| = \left|\frac{\sin\left(N\dfrac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\psi}{2}\right)}\right| \tag{6.74}$$

当 $\psi = 0$ 时,各阵元在场点 p 产生的辐射场同相叠加,此时阵因子达到最大值,由上式得

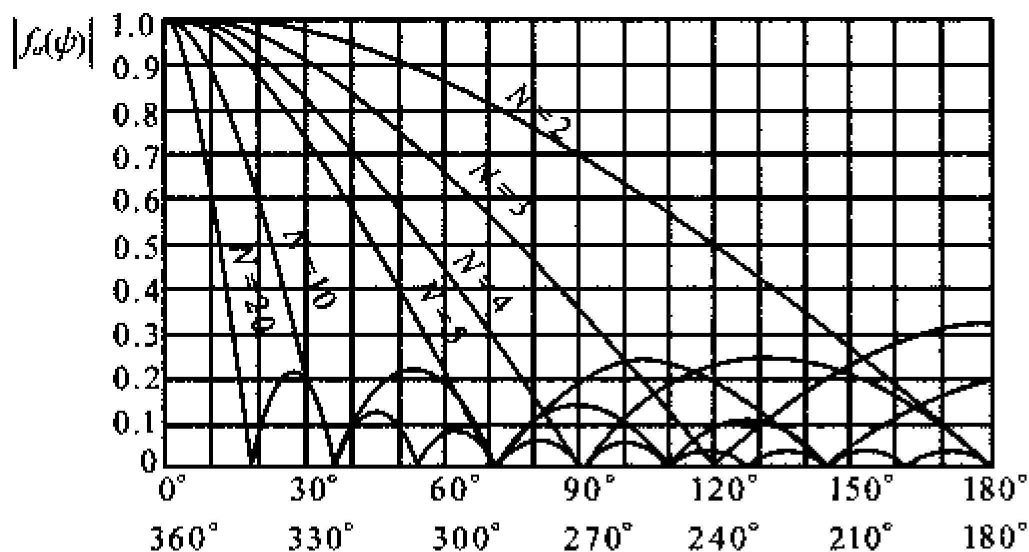
$$\lim_{\psi \to 0} |F_a(\psi)| = N$$

因此,均匀直线阵的归一化阵因子为

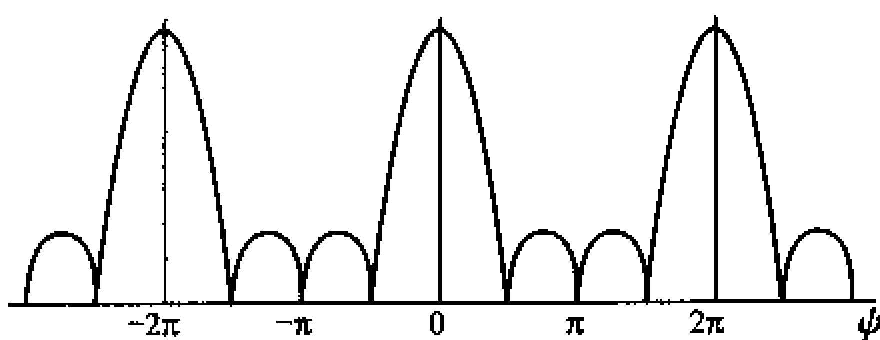
$$|f_a(\psi)| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\left(N\dfrac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\psi}{2}\right)}\right| \tag{6.75}$$

上式是均匀直线阵的归一化阵因子的一般表达式,根据此式可作出 $|f_a(\psi)|$ 随 ψ 的变化曲线。图 6.17(a)示出了 N 取六种不同值的情况下 $|f_a(\psi)|$ 随 ψ 的变化曲线。图 6.17(b)则示出了 $N = 4$ 时归一化阵因子随 ψ 的变化曲线,此时图 6.17(a)中被"折叠"的横坐标已被"展开"。

由式(6.75)及图 6.17 可知,$|f_a(\psi)|$ 是 ψ 的周期函数,周期为 2π,即随 ψ 的变化,$|f_a(\psi)|$ 的变化曲线周期性出现。因此,$|f_a(\psi)|$ 除在 $\psi = 0$ 获得最大值外,在 $\psi = \pm 2m\pi$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 时也都取得最大值。在图 6.17 中,与 $\psi = 0$ 对应的波瓣称为主瓣;与 $\psi = \pm 2m\pi$ 相对应的瓣称为栅瓣。为避免栅瓣出现,必须限制阵元间距 d 的大小,以使 ψ 被限定在$(-2\pi, 2\pi)$范围(一般取$[-\pi, \pi]$范围)内,如果在 $\alpha = 90^\circ$ 方向上 $|f_a(\psi)|$ 出现最大值(即



(a) N 取六种不同值的情况



(b) $N=4$ 的情况

图 6.17　N 元均匀直线阵的归一化阵因子的变化曲线

主瓣)时,在某些方向必会出现与主瓣幅度相等的栅瓣,这是不允许的。经过分析可知,对端射阵(最大辐射出现在 $\alpha=0°$, $180°$方向),取 $d=\lambda/4$ 不出现副瓣;对侧射阵(最大辐射出现在 $\alpha=\pm 90°$ 方向),则应取 $d=\lambda/2$,这可通过 ψ 与 d 的关系得到。

利用式(6.75)还可确定均匀直线阵的主瓣方向、零辐射方向、第一副瓣电平以及主瓣零点宽度等,下面作简单介绍。

(1) 最大辐射方向(主瓣方向)

由式(6.75)可知,当 $\psi=0°$ 时,均匀直线阵获得最强辐射,即

$$kd\cos\alpha_{max}+\xi=0$$

于是获得最大辐射方向角 α_{max} 为

$$\alpha_{max}=\arccos\left(-\frac{\xi}{kd}\right) \quad 或 \quad \cos\alpha_{max}=-\frac{\xi}{kd} \tag{6.76}$$

显然,若要求 $\alpha_{max}=0$ 或 π(此时均匀直线阵为端射阵),则各单元天线上的电流相位与单元间距必须满足下式:

$$\xi=\mp kd \tag{6.77}$$

式中,"$-$"对应 $\alpha_{max}=0°$;"$+$"对应 $\alpha_{max}=180°$。若要求 $\alpha_{max}=\pm\pi/2$,此时均匀直线阵为侧射阵,则由式(6.76)可知,此时 $\xi=0$,即各单元天线上的电流不需要相位差。此外,若要求最大辐射在任意角度 α 方向,则各单元天线上的电流与单元间距间的关系由式(6.76)确定。由此可见,通过改变各单元天线上激励电流相位可以在天线不作机械转动的条件下实现天线阵波束在空间自由扫描,这种通过改变相邻单元电流相位实现波束扫描的天线阵,称为相控阵天线。

(2) 零辐射方向和第一副瓣电平

由式(6.75)可知,均匀直线阵的归一化方向图的零点发生在 $|f_a(\psi)|=0$ 处,即

$$\frac{N\psi}{2}=\pm m\pi,\ (m=1,2,\cdots) \quad 或 \quad \psi=\pm\frac{2m\pi}{N} \tag{6.78}$$

任意两个相邻的零点之间,归一化方向图有一个次极大值即旁瓣出现,它们在 $|\sin(N\psi/2)|=1$ 处,即

$$\psi=\pm\frac{(2m+1)\pi}{N},\ m=1,2,\cdots \tag{6.79}$$

第一副瓣发生在 $m=1$ 即 $\psi=\pm 3\pi/N$ 处。当 N 很大时，由式(6.79)可知，第一副瓣的幅值为

$$\frac{1}{N}\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)}\right|\approx\frac{2}{3\pi} \tag{6.80}$$

可见，第一副瓣的幅值与主瓣的幅值之比为 21.22%。换言之，第一副瓣电平为 20 lg(0.212 2/1) ≈−13.56 dB。这表明，对均匀直线阵，当第一副瓣电平达到−13.56 dB 时，即使再增加天线阵元数也不能降低副瓣电平。

(3) 主瓣零点宽度

当均匀直线阵的阵元数很大时，天线阵主瓣的两个零点之间的宽度 $2\theta_0$ 可近似确定。令 ψ_{01} 表示第一个零点，令式(6.78)中的 $m=1$，得

$$\psi_{01}=\pm\frac{2\pi}{N} \tag{6.81}$$

对侧射阵 ($\xi=0$, $\alpha_{max}=\pi/2$)，设第一个零点发生在 α_{01} 处，则两个零点之间的宽度为

$$2\theta_0=\pm(\alpha_{01}-\alpha_{max}) \tag{6.82}$$

于是，$\cos\alpha_{01}=\cos(\alpha_{max}+\theta_0)=\psi_{01}/(kd)$，即 $\sin\theta_0=2\pi/(Nkd)$。所以

$$2\theta_0=2\arcsin\left(\frac{\lambda}{Nd}\right) \tag{6.83}$$

当 $Nd\gg\lambda$ 时，主瓣零点宽度为

$$2\theta_0=\frac{2\lambda}{Nd}$$

对端射阵 ($\xi=-kd$, $\alpha_{max}=0$)，设第一个零点发生在 α'_{01} 处，因 $\psi_{01}=kd(\cos\alpha'_{01}-1)$，故考虑式(6.81)，有

$$\cos\alpha'_{01}=\cos\theta_0=\frac{\psi_{01}}{kd}+1=1-\frac{\lambda}{Nd}$$

当 θ_0 很小时，$\cos\theta_0\approx 1-\theta_0^2/2$，此时的主瓣零点宽度变为

$$2\theta_0\approx 2\sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}}$$

这表明，均匀端射阵的主瓣零点宽度大于同样尺寸的均匀侧射阵的主瓣零点宽度。

在天线阵的设计中，降低天线阵的副瓣电平具有实际意义，因为对发射天线而言，副瓣的出现分散了天线阵的辐射能量；对接收天线而言，副瓣的出现会引入更多的噪声。然而，天线阵的主瓣宽度和副瓣电平是既相互依赖又相互对立的一对矛盾，天线阵的主瓣宽度越小，则副瓣电平越高；反之，主瓣宽度越大，则副瓣电平越低。均匀直线阵的主瓣宽度可设计得很窄，但副瓣数目多，副瓣电平高。事实上，有一种天线阵能在主瓣宽度和副瓣电平间实现最优折中，这就是道尔夫—切比雪夫分布的天线阵。

6.6 互易定理

互易定理是电磁场理论中较重要的定理之一，它反映了两种不同场源间的影响和响应关系。

设体积为 V 的空间中填充线性媒质，其中存在两种同频率的电流源 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$，它们所产生的电磁场分别为 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{H}_2$。根据矢量恒等式(1.44)，有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{H}_2\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)-\boldsymbol{E}_1\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}_2) \tag{6.84}$$

将复数形式的两个旋度方程代入上式，得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)&=\boldsymbol{H}_2\cdot(-j\omega\mu\boldsymbol{H}_1)-\boldsymbol{E}_1\cdot(\boldsymbol{J}_2+j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2)\\&=-j\omega(\mu\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2+\varepsilon\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2)-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2\end{aligned} \tag{6.85}$$

同理，将上式中的下标“1”，“2”对调，有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)&=\boldsymbol{H}_1\cdot(-j\omega\mu\boldsymbol{H}_2)-\boldsymbol{E}_2\cdot(\boldsymbol{J}_1+j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_1)\\&=-j\omega(\mu\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_1+\varepsilon\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{E}_1)-\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1\end{aligned} \tag{6.86}$$

将式(6.85)减去式(6.86)，可得

$$\nabla\cdot[(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)-(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)]=\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2 \tag{6.87}$$

这就是洛仑兹互易定理的微分形式。将上式的两端取体积分，并对左端应用散度定理，可得

$$\oint_S[(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)-(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V(\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2)\mathrm{d}V \tag{6.88}$$

式中，S 为包围空间域 V 的封闭面。上式是洛仑兹互易定理的积分形式，也是互易定理的一般形式。

若两个电流源 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$ 均在空间域 V 外，空间域 V 内无源，显然式(6.88)右端为零，因此有

$$\oint_S[(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)-(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{6.89}$$

这是洛仑兹互易定理的简化形式。

假若 V 表示整个空间，S 为无限大的封闭面 S_∞，并设电流源 $\boldsymbol{J}_1$ 位于有限空间域 V_1 中，电流源 $\boldsymbol{J}_2$ 位于有限空间域 V_2 中，则电流源 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$ 在封闭面 S_∞ 上产生的电磁场趋于零，即式(6.88)左端的面积分等于零，从而得

$$\int_{V_1}\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1\mathrm{d}V=\int_{V_2}\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2\mathrm{d}V \tag{6.90}$$

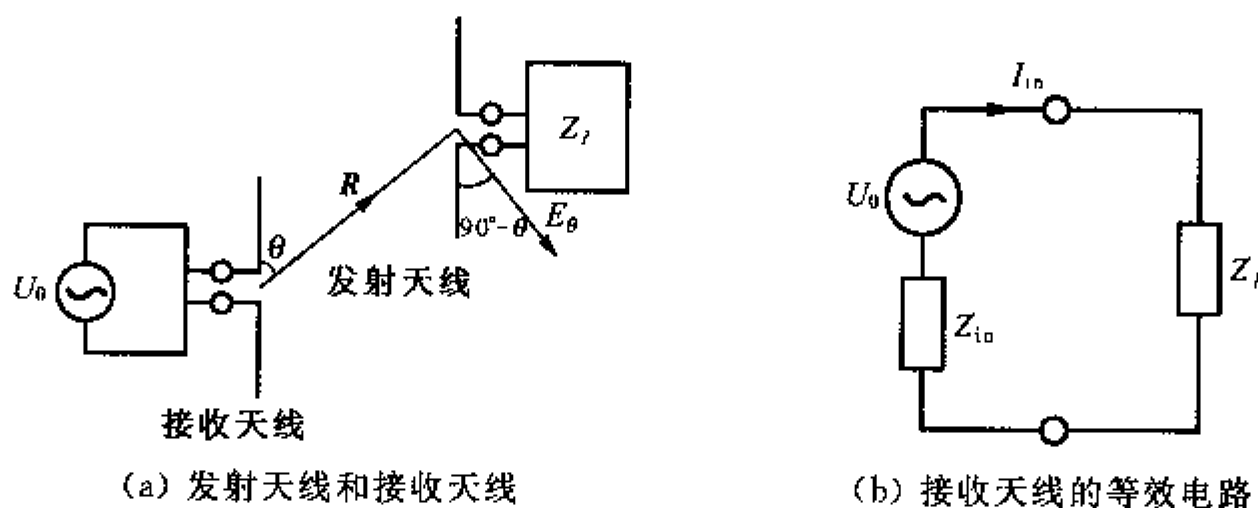
这是最为有用的卡森(J. R. Carson)形式的互易定理，它反映了两个场源与其场之间的互易关系。卡森互易定理说明了一幅天线用作发射和接收时其方向图、增益和输入阻抗都是相同的。

6.7 接收天线(有效面积和传输公式)

前面的分析是将天线当作发射天线的情况进行的。事实上,不管发射天线还是接收天线都是电磁能量转换器,且同一副天线用作发射和接收时,性能完全相同,但仍有不同之处。当天线用作接收天线时,由于接收天线只能获取发射功率中很小的一部分,因此接收天线不仅应在获取功率中具有高效率,而且应当与负载匹配以获得最大的传输功率。为此引入有效(接收)面积这一重要参数,它定义为接收天线接收的最大平均功率与入射波的平均功率密度之比,记为 A_e,即

$$A_e = \frac{(P_r)_{max}}{(S_i)_{av}} \tag{6.91}$$

不失一般性,设发射天线和接收天线均为电流元,其轴线均沿 z 轴方向,且接收天线处于发射天线的远区场中,两者间的距离为 R,如图 6.18(a)所示。



(a) 发射天线和接收天线　　(b) 接收天线的等效电路

图 6.18　远区场中的接收天线及其等效电路

于是,接收天线处的电场可由式(6.92)给出,即

$$E_\theta = j\frac{\eta_0 Il}{2\lambda R}\sin\theta \mathrm{e}^{-jkR} = E_0 \mathrm{e}^{-j\left(kR-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} \tag{6.92}$$

式中,复电流 $I = I_0 \mathrm{e}^{j\varphi}$, $E_0 = \eta_0 I_0 l\sin\theta/2\lambda R$。由于只有沿天线导体表面的切向电场分量 $E_0\sin\theta$ 才能在接收天线上感应出感应电动势 $\mathscr{E}$,即 $\mathscr{E} = -E_0 l\sin\theta$,其中 l 为电流元的长度,因此感应电压 $U_0 = E_0 l\sin\theta$。接收天线的等效电路如图 6.18(b)所示,其中 $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ 为其内阻抗,$Z_l = R_l + jX_l$ 为负载阻抗。当 $Z_l = Z_{in}$ 时,负载获得最大接收功率。此时有

$$I_{in} = \frac{U_0}{Z_{in} + Z_l} = \frac{U_0}{2R_{in}} \tag{6.93}$$

对无耗天线,$R_{in} = R_r$,以及 U_0 的最大值对应于 $\theta = 90°$,即 $(U_0)_{max} = E_0 l$。于是,负载可获得的最大平均功率为

$$(P_r)_{max} = \frac{1}{2}\mid I_{in}\mid^2 R_l = \frac{1}{2}\left(\frac{U_0}{2R_{in}}\right)^2 R_{in} = \frac{E_0^2 l^2}{8R_r} \tag{6.94}$$

而接收天线处的平均功率密度为

$$(S_i)_{av} = \frac{E_0^2}{2\eta_0} \tag{6.95}$$

将式(6.25)、式(6.94)以及式(6.95)代入式(6.91)，可得天线的有效面积为

$$A_e = \frac{\eta_0 l^2}{4R_r} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \tag{6.96}$$

可见，有效面积与天线的长度无关。

对电流元，$G = D = 1.5$，故增益 G 与有效面积 A_e 间满足以下关系：

$$\frac{G}{A_e} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \tag{6.97}$$

此式由电流元导出，但可证明，此关系对任何天线都适用。

设发射天线的输入功率为 P_t，增益为 G_t，则与发射天线最大辐射方向相距 R 处的接收天线处的平均功率密度为

$$(S_{max})_{av} = (S_i)_{av} D_t = \frac{P_r D_t}{4\pi R^2} = \frac{P_t D_t \eta_A}{4\pi R^2} = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2} \tag{6.98}$$

设接收天线的增益为 G_r，它的最大辐射方向也指向发射端，因此接收天线能接收到的最大平均功率为

$$P_{max} = A_e (S_{max})_{av} = \frac{G_r}{4\pi/\lambda^2} \frac{P_t G_t}{4\pi R^2} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 P_t G_t G_r \tag{6.99}$$

此式通常称为弗利斯(Friis)传输公式，它说明了接收天线的接收功率和发射功率之间的关系。

习 题

6-1 设电流元的轴线沿东西方向放置，在远方有一移动接收台停在正南方向而接收到最大电场强度。当电台沿以电流元为中心的圆周在地面上移动时，电场强度的大小逐渐减小。问：当电场强度值减小到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时，电台的位置偏离正南方向多少角度？

6-2 一半径 $r_0 = 5$ cm，$N = 10$ 匝的小线圈用作为接收天线，此天线被放置于距轴线沿 z 轴的半波对称振子 10 km 处，并选其使穿过的磁通量达最大的取向。若输入到半波对称振子上的功率为 5 W，波源的工作频率为 270 MHz 时，求线圈中的开路电压。

6-3 如图 6.19 所示，在 xOy 平面上有一半径为 a 的导线圆环，其上载有时谐电流 $i = I_m \cos \omega t$。p 点是距坐标原点为 R 的场点。

① 导出此载流圆环在 $R \gg \lambda \gg a$ 处 p 点产生的矢量磁位的复数表达式；

② 求远区的平均功率密度。

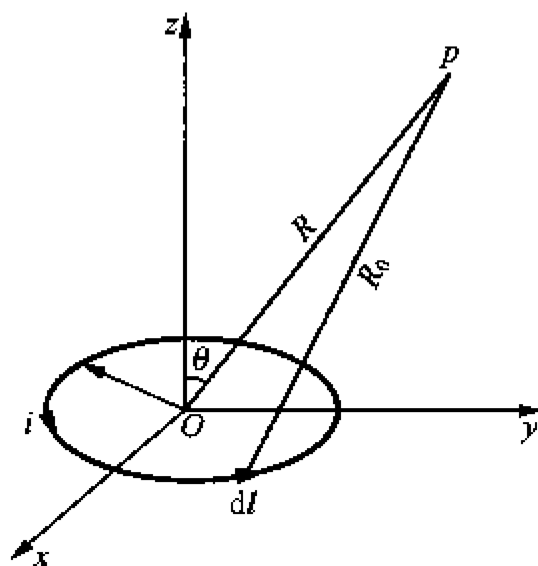


图 6.19　题 6-3 附图

6-4　已知两天线的归一化方向图函数分别为：

① $|F(\theta)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right|$；

② $|F(\theta)| = \left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right|$。

求它们的半功率波束宽度。

6-5　已知一无方向性天线的辐射功率为 100 W。

① 求距离该天线 10 km 处的远区场点 p 处的电场强度值；

② 若将此天线改为方向性系数为 100 的强方向性天线，天线的最大辐射方向对准 p 点，则 p 点的电场强度值为多少？

6-6　试求具有下列归一化方向图函数的天线的方向性系数：

① $|F(\theta)| = \begin{cases} \cos^2\theta, & \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$；② $|F(\theta)| = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & \theta > \frac{\pi}{4} \end{cases}$。

6-7　在垂直于半波对称振子轴线方向上远区 $R = 200$ km 处测得电场强度值为6 mV/m。

① 求此半波对称振子的辐射功率；

② 若采用电流元辐射，则辐射功率为多少？

6-8　一个电流元和一个小电流圆环同时放在坐标原点，如图 6.20 所示。若 I_1 和 I_2 间满足 $I_1 l = kI_2\pi a^2$，其中 $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。

试证明：在远区任意点处的电磁场是一右旋圆极化波的场。

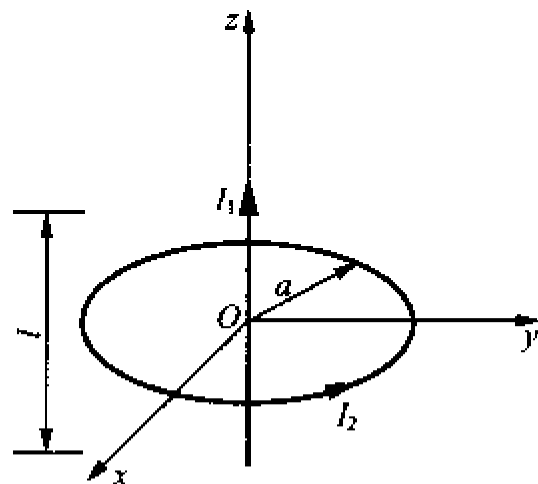


图 6.20 题 6-8 附图

6-9　长度为 $3\lambda/2$ 的对称振子的轴线沿 z 轴，其中心馈电点与坐标原点重合，振子上的电流按 $I = I_0\cos kz$ 分布。

① 导出此对称振子的远区辐射电场的复数表达式；

② 求其归一化方向图函数的表达式，并画出两个主平面上的归一化方向图；

③ 将此对称振子的归一化方向图同半波对称振子的归一化方向图进行比较，说明为什么较长的对称振子并非在 $\theta = \pi/2$ 方向上产生较大的辐射场强。

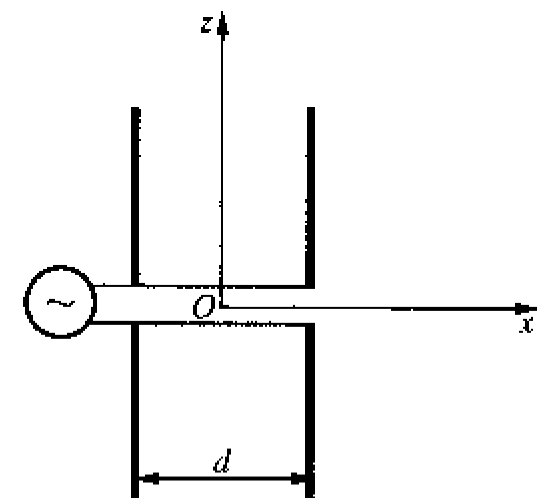


图 6.21　题 6-10 附图

6-10　自由空间中有两个半波对称振子构成的二元阵如图 6.21 所示，其中 $d = \lambda/4$，$I_{m2} = I_{m1}e^{-j\frac{\pi}{2}}$。求此二元阵的归一化方向图函数，并画出其 xOz 面及

xOy 面的归一化方向图。

6-11　一均匀直线阵的单元间距 $d=\lambda/2$，若要求它的最大辐射方向在偏离天线阵轴线 60° 的方向。求各单元天线上激励电流的相位差为多少？

6-12　一五单元的均匀直线阵的单元间距 $d=0.4\lambda$，为产生与阵列中心连线成 45° 夹角的主波束。

① 求各阵元上激励电流的相位差；

② 画出归一化的阵方向图。

6-13　由中心分别位于 $z=\lambda/8$ 和 $z=-\lambda/8$ 的两个完全相同的半波对称振子构成一个二元直线阵，欲使沿 $\theta=\pi/3$ 和 $\varphi=\pi/2$ 方向有最大辐射。

① 确定两阵元的取向以及激励电流间的相位差；

② 导出此二元阵的方向图函数。

6-14　自由空间中，一五单元均匀直线阵的单元间距为 $\lambda/2$，各单元上激励电流的振幅之比为 1∶2∶3∶2∶1，且各单元同向激励。若该直线阵的中心连线沿 y 轴，求其归一化阵因子。

6-15　两个相互垂直的半波对称振子构成一二元天线阵，其几何中心均位于坐标原点，轴线分别重合于 x 轴和 y 轴，它们由同一波源供电，功率平分，激励电流分别为 I_1 和 I_2（复振幅对应于 I_{m1} 与 I_{m2}）。通过传输系统中的移相器，使 x 轴上振子的激励电流的相位比 y 轴上振子的激励电流的相位滞后 90°。

① 导出 z 轴上远区辐射电场的复数表达式；

② 欲使此天线阵在 z 轴上远区场点形成的总辐射波为右旋圆极化波，试确定 I_{m1} 与 I_{m2} 间的关系。

6-16　在靠近位于 xOz 平面的无限大理想接地导电平面上方 h 处放置一与导电平板成 45°，长为 l 的基本电振子，已知此振子位于 xOy 平面内，如 6.22 所示。

① 导出此天线远区任一点及 xOy 平面上任一点辐射电场的复数表达式；

② 写出 xOy 平面上方向图函数的表达式。

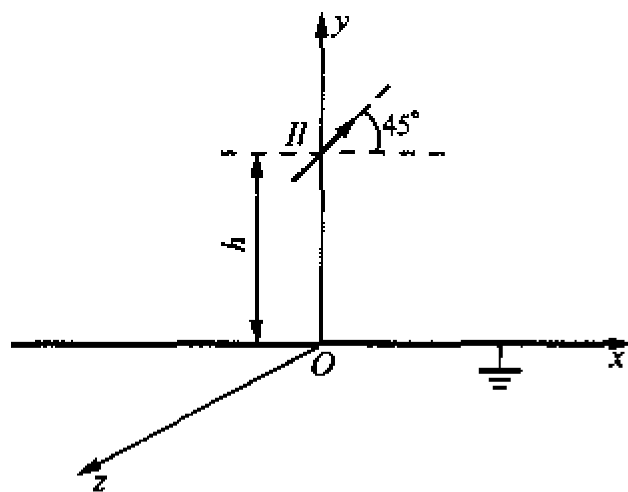


图 6.22　题 6-16 附图

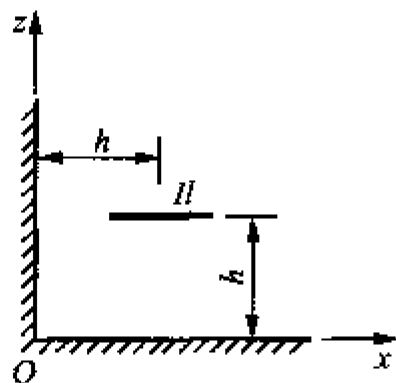


图 6.23　题 6-17 附图

6-17　两块半无限大的理想接地导电平板互相垂直相交，一载有频率为 30 MHz 的电流元 $Il(l\ll\lambda)$ 与两导电平板的距离都是 2.5 cm，如图 6.23 所示。

① 导出此天线系统的归一化方向图函数；

② 写出 xOz 面的归一化方向图函数，并画出其归一化方向图。

6-18 如图 6.24 所示，一载有均匀电流 $I = I_0 e^{j0^\circ}$ 的正方形导电环处于 xOy 平面，环心处于坐标原点，各边长为 $l \ll \lambda$。

① 导出该正方形电流环在远区场点 $p(R, \theta, \varphi)$ 处的矢量磁位及电磁场分量的表达式；

② 写出该正方形电流环在远区的平均功率密度的表达式；

③ 导出其辐射电阻的表达式。

6-19 四个完全相同的电流源组成一均匀直线式天线阵，如图 6.25 所示。所有电流源的激励电流大小相等，其相位对应于单元 1，2，3，4 依次滞后角度为 ξ。

① 写出此天线阵的归一化方向图函数；

② 取 $\xi = 0^\circ$，$d = \lambda/2$ 以及 $d = 3\lambda/4$，分别写出和画出天线阵在 xOy 面与 yOz 面上的归一化方向图函数的表达式和归一化方向图；

③ 取 $\xi = 90^\circ$，$d = \lambda/2$ 以及 $d = 3\lambda/4$，分别写出和画出天线阵在 xOy 面与 yOz 面上的归一化方向图函数的表达式和归一化方向图。

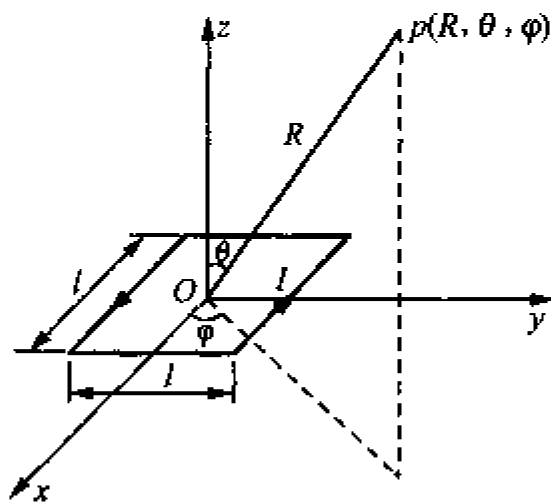


图 6.24 题 6-18 附图

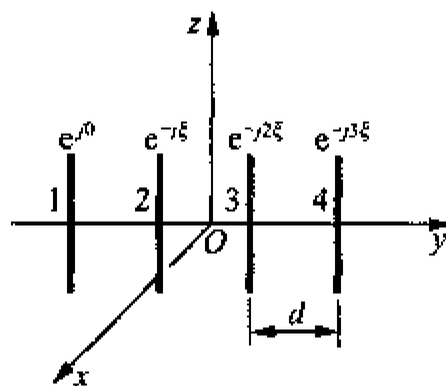


图 6.25 题 6-19 附图

6-20 利用互易定理，证明紧贴在理想导体表面上的切向电流源无辐射场。

附录 A 主要矢量分析公式

A.1 矢量代数恒等式

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_n AB\sin\theta_{AB}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

A.2 场论微分恒等式

$$\nabla R=-\nabla' R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{a}_R$$
$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\boldsymbol{a}_R}{R^2}$$
$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$\nabla(\phi\pm\psi)=\nabla\phi\pm\nabla\psi$$
$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$$
$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right)=\frac{1}{\psi^2}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{B}$$
$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi$$
$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}\pm\nabla\times\boldsymbol{B}$$
$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})=\phi(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$
$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

A.3 场论积分恒等式

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$ （散度定理）

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$ （斯托克斯定理）

$$\int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}$$ （旋度定理）

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) \mathrm{d}V = \oint_S (\psi \nabla \phi) \cdot \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S$$

（标量格林第一定理）

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \mathrm{d}V = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$ （标量格林第二定理）

$$\int_V [(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B})] \mathrm{d}V = \oint_S [\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

（矢量格林第一定理）

$$\int_V [\boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B})] \mathrm{d}V = \oint_S [\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

（矢量格林第二定理）

附录 B

常用正交曲线坐标系中的场论恒等式

B.1 直角坐标系

$$\nabla\phi = \text{grad}\,\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \text{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \text{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial z^2} = \boldsymbol{a}_x\nabla^2A_x+\boldsymbol{a}_y\nabla^2A_y+\boldsymbol{a}_z\nabla^2A_z$$

B.2 圆柱坐标系

$$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\boldsymbol{a}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r\left(\nabla^2A_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{A_r}{r^2}\right)+\boldsymbol{a}_\varphi\left(\nabla^2A_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi}{r^2}\right)+\boldsymbol{a}_z\nabla^2A_z$$

B.3 圆球坐标系

$$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_R\frac{\partial\phi}{\partial R}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2A_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_R\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi)\right]+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} = {} & \boldsymbol{a}_R\left[\nabla^2A_R-\frac{2}{R}\left(A_R+\cot\theta A_\theta+\csc\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]+\\ & \boldsymbol{a}_\theta\left[\nabla^2A_\theta-\frac{1}{R}\left(\csc^2\theta A_\theta-2\frac{\partial A_R}{\partial\theta}+2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]+\\ & \boldsymbol{a}_\varphi\left[\nabla^2A_\varphi-\frac{1}{R^2}\left(\csc^2\theta A_\varphi-2\csc\theta\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\end{aligned}$$

附录 C

常用材料的参数和物理常数

附表 C.1 相对介电常数 ε_r 和损耗角正切 $\tan\delta_c$（常温及低频下的近似值）

材料	ε_r	$\tan\delta_c$	材料	ε_r	$\tan\delta_c$
空气	1.000 6		瓷	6	0.014
酒精	25	0.1	比拉脑	4.4	0.000 5
氧化铝	8.8	0.000 6	硼硅酸玻璃	4	0.000 6
琥珀	2.7	0.002	熔化的石英	3.8	0.000 75
酚醛塑料	4.74	0.022	橡胶	2.5～3	0.002
钛酸钡	1 200	0.013	二氧化硅	3.8	0.000 75
二氧化碳	1.001		矽	11.8	
锗	16		雪	3.3	0.5
玻璃	4～7	0.001	氯化钠(食盐)	5.9	0.000 1
冰	4.2	0.1	干燥的土壤	2.8	0.07
云母	5.4	0.000 6	冻石	5.8	0.003
氯丁橡胶	6.6	0.01	特氟隆	2.1	0.000 3
尼龙	3.5	0.02	二氧化钛	100	0.001 5
纸	3	0.008	未蒸馏的水	80	0.04
有机玻璃	3.45	0.04	海水		4
聚乙烯	2.26	0.000 2	干燥的木材	1.5～4	0.01
聚丙烯	2.25	0.000 3	苯乙烯泡沫	1.03	0.000 1
聚苯乙烯	2.55	0.000 05	真空	1.0	

附表 C.2 电导率 σ($T = 20$℃ 及 $f = 0$ Hz)

材料	$\sigma(\mathrm{S \cdot m^{-1}})$	材料	$\sigma(\mathrm{S \cdot m^{-1}})$
银	6.17×10^7	黄铜	1.57×10^7
铜	5.80×10^7	镍	1.45×10^7
金	4.50×10^7	铁	1.03×10^7
铝	3.54×10^7	磷青铜	1×10^7
钨	1.82×10^7	焊料	0.7×10^7
锌	1.67×10^7	碳钢	0.6×10^7

(续表)

材　料	$\sigma(\mathrm{S\cdot m^{-1}})$	材　料	$\sigma(\mathrm{S\cdot m^{-1}})$
德国银	0.3×10^{7}	新鲜水	10^{-3}
锰	0.227×10^{7}	未蒸馏的水	10^{-4}
锗	0.22×10^{7}	沙土	10^{-5}
不锈钢	0.11×10^{7}	花岗岩	10^{-6}
镍铬铁合金	0.1×10^{7}	大理石	10^{-8}
石墨	7×10^{5}	胶木	10^{-9}
矽	1 200	瓷	10^{-10}
铁氧钵	100	金钢石	2×10^{-3}
海水	5	聚苯乙烯	10^{-16}
石灰石	10^{-2}	石英	10^{-17}
粘土	5×10^{-4}		

附表 C.3　相对磁导率 μ_r(常温及低频下的近似值)

材　料	μ_r	材　料	μ_r
铋	0.999 998 6	铁粉	100
石蜡	0.999 999 42	机器钢	300
木材	0.999 999 5	铁氧钵	1 000
银	0.999 999 81	坡莫合金 45	2 500
铝	1.000 000 65	变压器钢	3 000
铍	1.000 000 79	矽铁	3 500
氯化镍	1.000 04	纯铁	4 000
硫酸锰	1.000 1	μ 磁性合金	20 000
镍	50	铝硅钛粉	30 000
铸铁	60	镍铁铝导磁合金	100 000
钴	60		

附表 C.4　物理常数

物理量	数　值
电子的电荷	$e=(1.602\,189\,2\pm0.000\,004\,6)\times10^{-19}$ C
电子质量	$m_e=(9.109\,534\pm0.000\,047)\times10^{-31}$ kg
真空的介电常数	$\varepsilon_0=(8.854\,187\,818\pm0.000\,000\,071)\times10^{-12}$ F/m
真空的磁导率	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m
光速(真空中)	$c=(2.997\,924\,574\pm0.000\,000\,011)\times10^{8}$ m/s

附录 D

标准矩形波导参数和型号对照

波导型号		主模频带 (GHz)	截止频率 (MHz)	结构尺寸(mm)			衰减 (dB/m)	美国相应型号 EIAWR -
IECR -	部标 BJ -			标宽 a	标高 b	标厚 t		
3		0.32～0.49	256.58	584.2	292.1		0.000 78	2300
4		0.35～0.53	281.02	533.4	266.7		0.000 90	2100
5		0.41～0.62	327.86	457.2	228.6		0.001 13	1800
6		0.49～0.75	393.43	381.0	190.5		0.001 49	1500
8		0.64～0.98	513.17	292.0	146.0	3	0.002 22	1150
9		0.76～1.15	605.27	247.6	123.8	3	0.002 84	975
12	12	0.96～1.46	766.42	195.6	97.80	3	0.004 05	770
14	14	1.14～1.73	907.91	165.0	82.50	2	0.005 22	650
18	18	1.45～2.20	1 137.1	129.6	64.8	2	0.007 49	510
22	22	1.72～2.61	1 372.4	109.2	54.6	2	0.00970	430
26	26	2.17～3.30	1 735.7	86.4	43.2	2	0.013 8	340
32	32	2.60～3.95	2 077.9	72.14	34.04	2	0.018 9	284
40	40	3.22～4.90	2 576.9	58.20	29.10	1.5	0.024 9	229
48	48	3.94～5.99	3 152.4	47.55	22.15	1.5	0.035 5	187
58	58	4.64～7.05	3 711.2	40.40	20.20	1.5	0.043 1	159
70	70	5.38～8.17	4 301.2	34.85	15.80	1.5	0.057 6	139
84	84	6.57～9.99	5 259.7	28.50	12.60	1.5	0.079 4	112
100	100	8.20～12.5	6 557.1	22.86	10.16	1	0.110	90
120	120	9.84～15.0	7 868.6	19.05	9.52	1	0.133	75
140	140	11.9～18.0	9 487.7	15.80	7.90	1	0.176	62
180	180	14.5～22.0	11 571	12.96	6.48	1	0.238	51
220	220	17.6～26.7	14 051	10.67	4.32	1	0.370	42
260	260	21.7～33.0	17 357	8.64	4.32	1	0.435	34

(续表)

波导型号		主模频带 (GHz)	截止频率 (MHz)	结构尺寸(mm)			衰减 (dB/m)	美国相应型号 EIAWR-
IECR-	部标 BJ-			标宽 a	标高 b	标厚 t		
320	320	26.4～40.0	21 077	7.112	3.556	1	0.583	28
400	400	32.9～50.1	26 344	5.690	2.845	1	0.815	22
500	500	39.2～59.6	31 392	4.775	2.388	1	1.060	19
620	620	49.8～75.8	39 977	3.759	1.880	1	1.52	15
740	740	60.5～91.9	48 369	3.099	1.549	1	2.03	12
900	900	73.8～112	59 014	2.540	1.270	1	2.74	10
1 200	1 200	92.2～140	73 768	2.032	1.016	1	2.83	8

附录 E

同轴线参数表

E.1 常用硬同轴线参数表

型号 \ 参数	特性阻抗 (Ω)	外导体内直径 (mm)	内导体外直径 (mm)	衰减 α (dB/m $\sqrt{Hz}$)	理论最大允许功率 (kW)	最短安全波长 (cm)
50-7	50	7	3.04	$3.38\times10^{-6}\sqrt{f}$	167	1.73
75-7	75	7	2.00	$3.08\times10^{-6}\sqrt{f}$	94	1.56
50-16	50	16	6.95	$1.48\times10^{-6}\sqrt{f}$	756	3.9
75-16	75	16	4.58	$1.34\times10^{-6}\sqrt{f}$	492	3.6
50-35	50	35	15.2	$0.67\times10^{-6}\sqrt{f}$	3 555	8.6
75-35	75	35	10.00	$0.61\times10^{-6}\sqrt{f}$	2 340	7.8
53-39	53	39	16	$0.6\times10^{-6}\sqrt{f}$	4 270	9.6
50-75	50	75	32.5	$0.31\times10^{-6}\sqrt{f}$	16 300	1.85
50-87	50	87	38	$0.27\times10^{-6}\sqrt{f}$	22 410	21.6
50-110	50	110	48	$0.22\times10^{-6}\sqrt{f}$	35 800	27.3

注：① 本表数据均按 $\varepsilon_r=1$ 以及纯铜计算。
② 最短安全波长取 $\lambda=1.1\pi(a+b)$。

E.2 国产同轴射频电缆参数表

型号 \ 参数	特性阻抗 (Ω)	衰减(45 MHz) (不大于 dB/m)	电晕电压 (kV)	绝缘电阻 (MΩ/km)	相应旧型号
SYV-50-2-1	50	0.26	1	10 000	IEC-50-2-1
SYV-50-2-2	50	0.156	1	10 000	PK-19
SYV-50-5	50	0.082	3	10 000	PK-29
SYV-50-11	50	0.052	5.5	10 000	PK-48
SYV-50-15	50	0.039	8.5	10 000	PK-61
SYV-75-2	75	0.28	6.9	10 000	
SYV-75-5-1	75	0.082	2	10 000	PK-1
SYV-75-7	75	0.061	4.5	10 000	PK-20
SYV-75-18	75	0.026	8.5	10 000	PK-8

(续表)

型号 \ 参数	特性阻抗 (Ω)	衰减(45 MHz) (不大于 dB/m)	电晕电压 (kV)	绝缘电阻 (MΩ/km)	相应旧型号
SYV-100-7	100	0.066	3	10 000	PK-2
SWY-50-2	50	0.160	3.5	10 000	PK-119
SWY-50-7-2	50	0.065	4	10 000	PK-128
SWY-75-1	75	0.082	2	10 000	PK-101
SWY-75-7	75	0.061	3	10 000	PK-120
SWY-100-7	100	0.066	3	10 000	PK-102

注:同轴射频电缆型号组成:

第一个字母"S"表示同轴射频电缆。

第二个字母"Y"表示以聚乙烯作绝缘;"W"表示以稳定聚乙烯作绝缘。

第三个字母"V"表示护层为聚氯乙烯;"Y"表示护层为聚乙烯。

第四位数字表示同轴电缆的特性阻抗。

第五位数字表示芯线绝缘外径。

第六位数字表示结构序号。